de Sitter, Newton-Hooke, pp Waves, and All That

2003. 10. 24

· 宇宙学常数 (CC)

$$\Lambda > 0, \quad \Lambda \sim 10^{-120} M_p^4$$

$$\sim 10^{-120} \left(10^{18+9} ev\right)^4$$

$$\sim \left(10^{-3} ev\right)^4$$

解释Λ, 需要至少两个能标:

$$M_p \sim 10^{18}\ Gev\ ; \quad M_{SUSY} \sim 10^{3}\ Gev$$

仿照 Banks:

$$\Lambda \sim \frac{M_{SUSY}^{\lambda}}{M_p^{\lambda-4}}$$

- $\lambda = 0$, $\Lambda \sim M_p^4$

QG short distance behavior

- $\lambda = 4$, $\Lambda \sim M_{SUSY}^4$

SUSY breaking

- The observed value of λ is

$\lambda \sim 8$

$$\Lambda \sim \frac{M_{SUSY}^8}{M_p^4} \sim \left(\frac{M_{SUSY}}{M_p}\right)^8 M_p^4 \sim 10^{-120} M_p^4$$

粗略地说，有两类不同的问题

(i) 构造理论模型说明 Λ 何以如此之小；（RG 的 Talk）

(ii) 给定 $\Lambda > 0$，建立相应真空背景中引力量子涨落的微观描述

"de Sitter 引力"

de Sitter 空间：带正宇宙学常数的真空 Einstein 场方程的解

· 常曲率空间

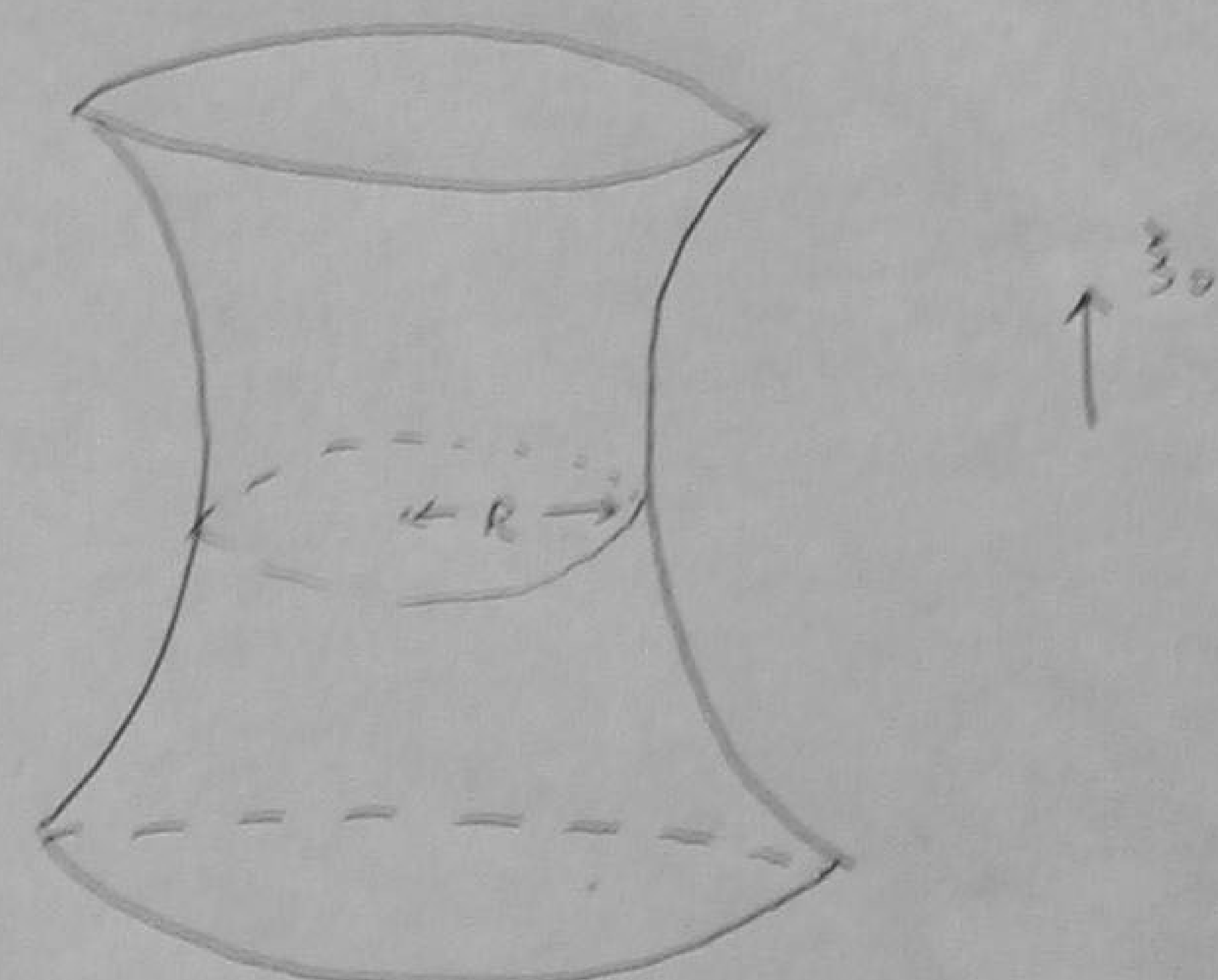
· 极大对称空间

$$dS_D \rightsquigarrow \mathbb{R}^{D,1}$$

$$-\xi_0^2 + \xi_1^2 + \cdots + \xi_D^2 = R^2$$

dS_D 的 "尺度"

$$R \sim \frac{1}{\sqrt{\Lambda}}$$



dS_D 的度规是 $\mathbb{R}^{D,1}$ 上平度规的诱导

- Isometry Group: $SO(D,1)$

- Global coordinates:

$$\begin{cases} \xi_0 = R\,\mathrm{sh}\dfrac{t}{R} \\ \xi_i = R\,\mathrm{ch}\dfrac{t}{R}\cdot\omega_i \qquad (i=1,\cdots,D) \end{cases}$$

$\omega_i \in S^{D-1}$; $\sum_{i=1}^{D}\omega_i^2 = 1$; $\sum_{i=1}^{D}\omega_i d\omega_i = 0$

$$\sum d\omega_i^2 \equiv d\Omega_{D-1}^2$$

$$ds^2 = -d\xi_0^2 + \sum_{i=1}^{D} d\xi_i^2$$

$$= -dt^2 + R^2 \mathrm{ch}^2\frac{t}{R} \cdot d\Omega_{D-1}^2$$

• dS 引力的若干特点

(1) $dS_D \sim \mathbb{R}^1 \times S^{D-1}$

↓

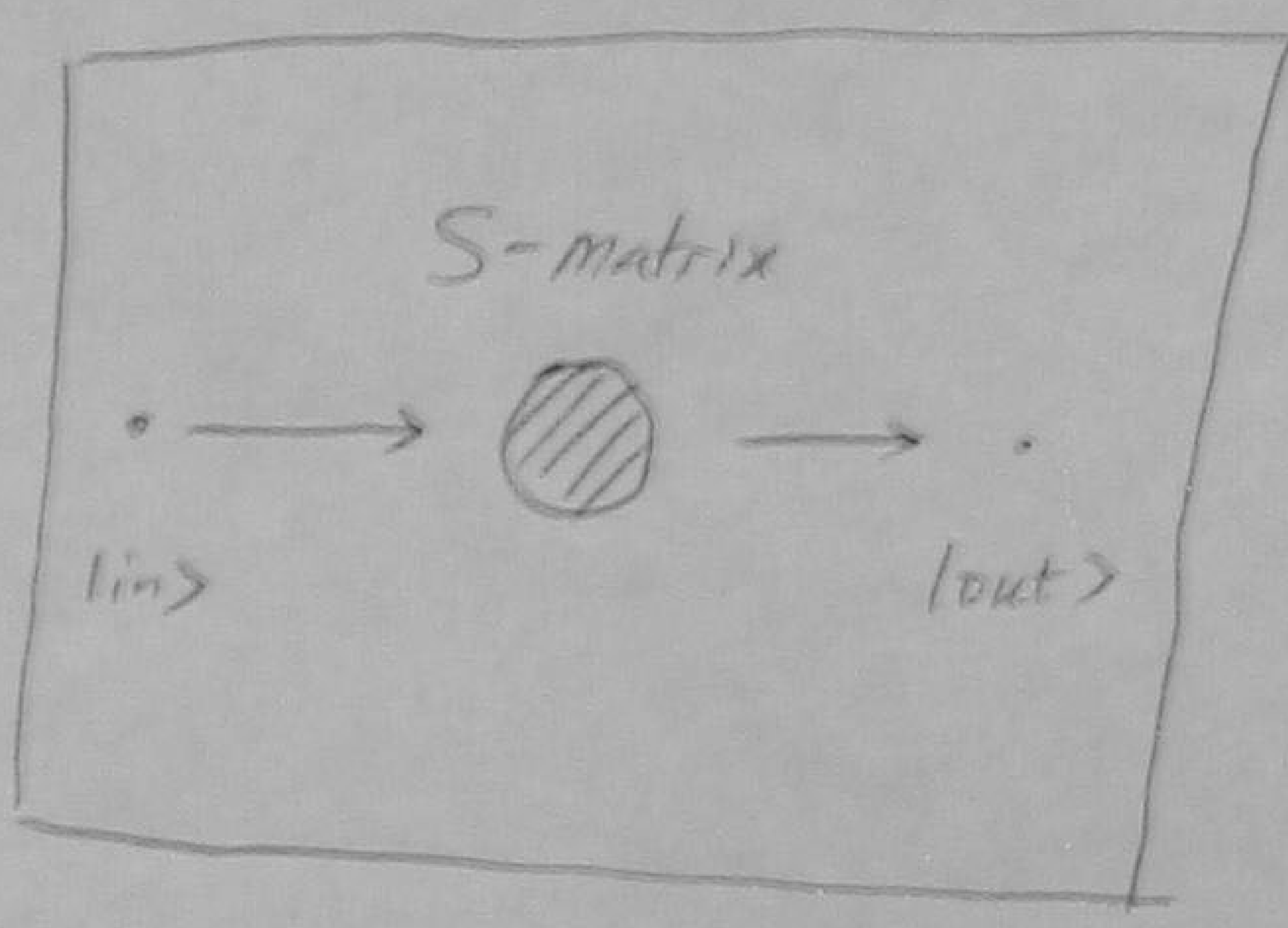
空间部分紧致

无"空间无穷远处"的概念

不能在通常意义下谈论

渐近 de Sitter 空间

(只能定义"无限过去"和"无限将来")



无法绝热地关掉相互作用，来定义渐近态，进而定义 S-matrix

(2) 无法定义正的、守恒的能量

$$E_{Killing} \geq 0 \quad (不成立)$$

比较"物理"的 Argument:

dS_4, Euclidean formulation

$$\tilde{g}_{\mu\nu} = \Omega^2 \cdot g_{\mu\nu}^{background}$$

$\uparrow$

conformal fluctuation

$$\tilde{R} = \Omega^{-2} R - 6\Omega^3 \Box \Omega$$

$$I = -\frac{1}{16\pi G}\int d^4x \sqrt{g}\,(\Omega^2 R + 6\nabla\Omega\cdot\nabla\Omega - 2\Lambda\Omega^4)$$

$\rightarrow$ $\lambda\phi^4$ theory, w/ wrong sign of the K.T.

$\frac{1}{2}\nabla\phi\cdot\nabla\phi$.

Rapid modes of Ω $\rightarrow$ $I \ll 0$

解析延拓: $\Omega = 1 + i\varphi$

$$I_{Kinetic} = \int \frac{1}{2} \varphi \left(-6\Box - 8\Lambda \right) \varphi$$

$-\Box \geq 0$ (正定算子)

- 当 $\Lambda \leq 0$, 动能项 ≥ 0
- 当 $\Lambda > 0$, 动能项无下界

(3) 作为推论, dS 引力不允许有超对称.

SUSY 保持的条件:

$$\sum_A \{ \bar{Q}_A, Q_A \} = H \geq 0$$

(4) Hawking 温度、熵

Wick rotation: $t \to i\tau$

$$ds^2 = d\tau^2 + R^2 \cos^2 \frac{\tau}{R} \cdot d\Omega_{D-1}^2$$

若 $\tau \sim \tau + 2\pi R$,

$$ds^2 = R^2 \, d\Omega_D^2$$

不然度量所描述的空间有 conic singularity.

$$\beta = 2\pi R, \qquad T_H = \frac{1}{\beta} = \frac{1}{2\pi R}.$$

$$S = \beta \cdot \frac{\partial I}{\partial \beta} - I$$

$$= \frac{A}{4G} \sim \frac{R^{D-2}}{G} \sim \frac{1}{G \Lambda^{(D-2)/2}}$$

引入无量纲的 coupling constant

$$g = G \cdot \Lambda^{(D-2)/2}$$

Hawking - Bekenstein 熵公式亦可写成:

$$S \sim \frac{1}{g}$$

(5) Banks' observation

dS 引力系统的熵有限 $\rightarrow \dim \mathcal{H}_{tot} < \infty$

$$S \sim \log \dim \mathcal{H}_{tot}$$

$$\dim \mathcal{H}_{tot} \sim \exp\left(\frac{1}{g}\right)$$

(i) $N_{dof} \equiv N < \infty$

(ii) $\mathcal{H}_{tot} \sim \mathcal{H}^{\otimes N}$; $\dim \mathcal{H} < \infty$

(6) 弱耦合极限

$$g \to 0, \quad \dim \mathcal{H}_{tot} \sim \exp\left(\frac{1}{g}\right) \to \infty$$

cf. de Sitter 引力传统的微扰论

$\mathcal{H}_{tot}$: $SO(D,1)$ 的幺正表示

非紧 $\Rightarrow$ $\dim \mathcal{H}_{tot} = \infty$

场论系统： $N_{dof} = N = \infty$

"单粒子" Hilbert 空间 $\mathcal{H}$ 也是无限维的

$$\mathcal{H}_{tot} \sim \mathcal{H}^{\otimes N}$$

$\dim \mathcal{H}_{tot}$ 发散的两个来源：

(i) $N = \infty$

(ii) $\dim \mathcal{H} = \infty$

$\Big\}$ 能否同时在 holographic description 中反映出来？

非相对论极限

希望：在这个极限下能简化问题

例1. 平坦时空背景中(超)引力的量子理论

$$M_{11} = \mathbb{R}^{10,1}, \quad G = SO(10,1) \ltimes \mathbb{R}^{10,1}$$

D=11 M-Theory：迄今无直接的动力学描述

紧化： $M_{11} = M_{10} \times S^1$

S^1 是类空 (x^{11}) 方向上的圆周，半径 R_s

IIA strings on M_{10} w/ D0 branes

$$g_{str.} \sim R_s/\ell_s \sim \left(\frac{R_s}{\ell_p}\right)^{\frac{3}{2}}$$

D0 brane charges n $\leftrightarrow$ KK modes $p_{11} \sim \frac{n}{R_s}$

$n = 0, \pm 1, \pm 2, \cdots$ $\quad (n<0:\ \overline{D0})$

名言：

"没有作用量就没有物理" :-)

不得不考虑弱耦情形：$R_s \to 0$.

系统中含 $D0$, $\overline{D0}$，湮没 → Tachyon 凝聚

即使在弱耦合极限下动力学还是很复杂

进一步简化：沿紧化的 x'' 方向作无穷大的 Lorentz boost

$$p_{11} \to \frac{n+\nu}{R_s} \quad ; \quad \nu \to +\infty$$

D0 branes 的荷 $N \equiv n+\nu \to \infty$ 都变成正值，基本自由度只留下 D0 branes；$\overline{D0}$ 和 F strings 退耦 (decoupling limit). 质量

$$m \sim N \to \infty$$

非相对论极限 $SO(9,1) \ltimes R^{9,1} \rightsquigarrow Gal(9,1)$

动力学：非相对论（超对称）量子力学

$$x^i \to X^i \quad (N\times N \text{ hermitian 矩阵})$$

$$L \sim \frac{1}{2g_{str}}\, tr\left((\dot{X}^i)^2 - \frac{1}{2}[X^i, X^j]^2 + \cdots\right)$$

BFSS M(atrix) Theory $\quad N \to \infty,\ (R_s \to \infty)$

$$p_{\parallel} \sim \frac{N}{R_s} \to \infty$$

对称性考虑

Isometry group ⇝ $SO(10,1) \ltimes R^{10,1}$

$\cup$ 紧化

$SO(9,1) \ltimes R^{9,1}$

$\downarrow$ Inönü-Wigner

$Gal(9,1)$

建立以（超对称）Galilei 群为对称群的量子力学，再将普通量子力学推广到矩阵量子力学. → $D=11$ 超引力的"微观描述"，或 IMF 中的 M-理论.

Inönü - Wigner Contraction

$SO(D-1,1)\times R^{D-1,1}$ 生成元:

P^μ (平移)　$J^{\mu\nu}$ (Lorentz 转动)　$\mu=0,\cdots,D-1$

Poincaré 代数:

$$[P^\mu, P^\nu]=0, \quad [J^{\mu\nu}, P^\lambda] = i(\eta^{\mu\lambda}P^\nu-\eta^{\nu\lambda}P^\mu)$$

$$[J^{\mu\nu}, J^{\lambda\rho}] = i(\eta^{\mu\lambda}J^{\nu\rho}+\eta^{\nu\rho}J^{\mu\lambda}-\eta^{\mu\rho}J^{\nu\lambda}-\eta^{\nu\lambda}J^{\mu\rho})$$

引进两个参数: 光速 c, 质量 μ; 并令

$$\begin{cases} P^0 = -P_0 = -(\mu c\cdot\mathbb{1}+\frac{1}{c}H) \\ J^{0i} = cK^i \qquad (i=1,\cdots,D-1) \end{cases}$$

取 $c\to\infty$, 得到 Galilei 代数

$$[P^i, P^j] = [K^i, K^j] = [P^i, H] = [J^{ij}, H] = 0$$

$$[P^i, K^j] = -i\mu\delta^{ij}\cdot\mathbb{1}, \quad [H, K^i] = -iP^i$$

$$[J^{ij}, P^k] = i(\delta^{ik}P^j-\delta^{jk}P^i), \quad [J^{ij}, K^k] = i(\delta^{ik}K^j-\delta^{jk}K^i)$$

有限 N 矩阵理论

Susskind: D=11 M 理论的 DLCQ

(离散光锥量子化)

取 $x^{11} = x$; $x^{\pm} = \frac{1}{\sqrt{2}}(t \pm x)$

x^+: 光锥时间; x^-: 纵向坐标 (紧化)

$P_+ = -P^- = H$; $P_- = -P^+ \equiv \mu \cdot \mathbb{1}$

$$x^- \sim x^- + 2\pi R, \quad \mu = \frac{N}{R}$$

看上去也象是一个非相对论系统:

$$M^2 = -P_\mu P^\mu = 2P_+P_- - \vec{P}_\perp^{\,2}$$

$$= 2\mu H - \vec{P}_\perp^{\,2}$$

$$\Rightarrow \quad H = \frac{\vec{P}_\perp^{\,2}}{2\mu} + U, \quad U \equiv \frac{M^2}{2\mu}$$

在 LC 规范下, 只要取 $\mu > 0$ 的 sector, $\overline{D0}$

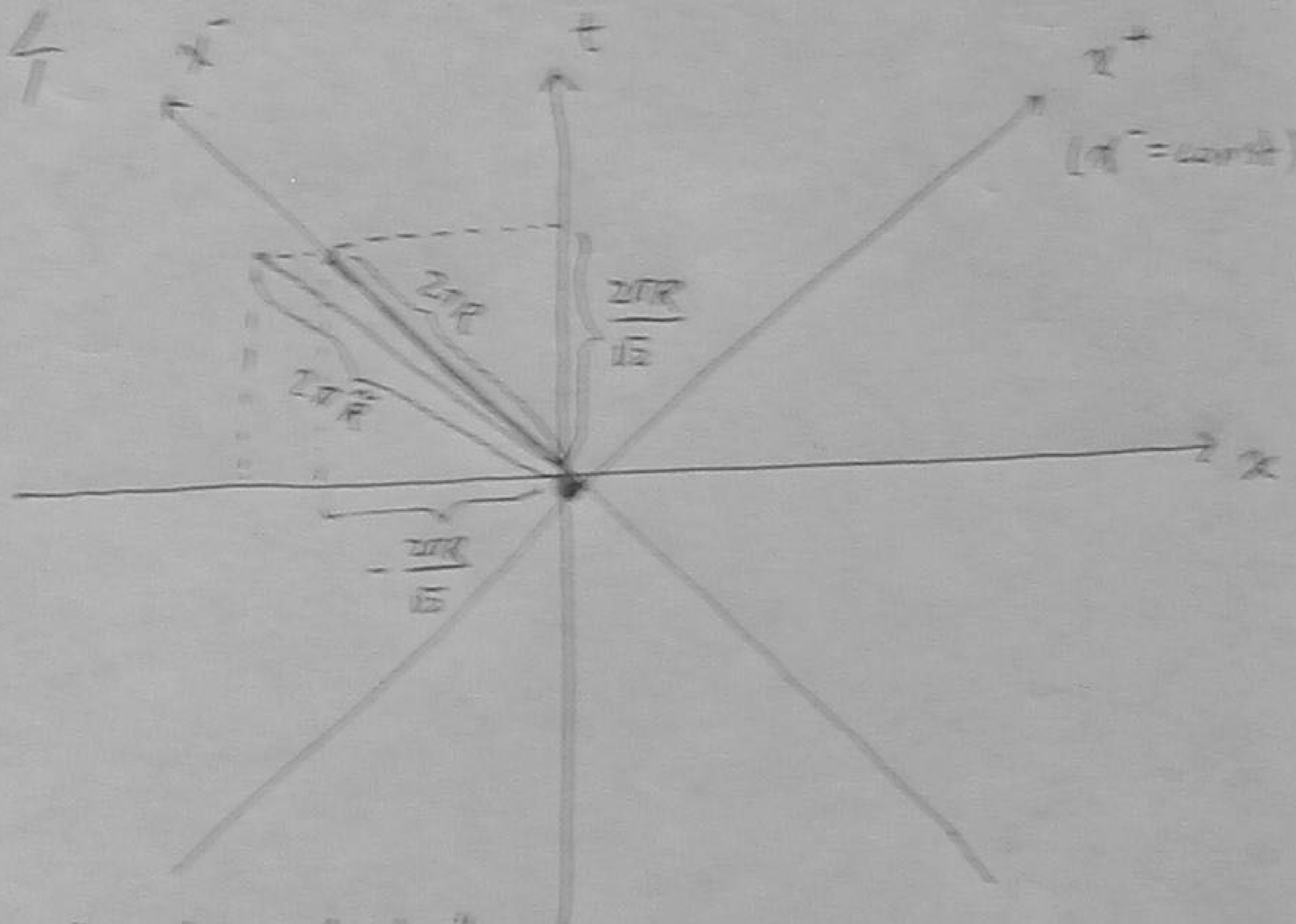
在系统中也是脱耦的.

周期性条件 $x^- \sim x^- + 2\pi R$:

$$t \sim t + \frac{2\pi R}{\sqrt{2}}, \quad x \sim x - \frac{2\pi R}{\sqrt{2}}$$

把紧化的 circle 作个

"微小"的 deformation



$$\tilde{R} \equiv \sqrt{R^2 + 2R_s^2}$$

$$R_s \simeq 0$$

这样的 S^1 是 "near light-like"

紧化条件:

$$t \sim t + \frac{2\pi R}{\sqrt{2}}, \quad x \sim x - \frac{2\pi\tilde{R}}{\sqrt{2}}$$

Lorentz boost

$$\begin{pmatrix} \operatorname{ch}\varphi & -\operatorname{sh}\varphi \\ -\operatorname{sh}\varphi & \operatorname{ch}\varphi \end{pmatrix}; \quad \begin{cases} \operatorname{ch}\varphi = \dfrac{\tilde{R}}{\sqrt{2}R_s} \\ \operatorname{sh}\varphi = \dfrac{R}{\sqrt{2}R_s} \end{cases}$$

$$\begin{pmatrix} \frac{\tilde{R}}{\sqrt{2}R_s} & -\frac{R}{\sqrt{2}R_s} \\ -\frac{R}{\sqrt{2}R_s} & \frac{\tilde{R}}{\sqrt{2}R_s} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ -2\pi R_s \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \frac{2\pi R}{\sqrt{2}} \\ -\frac{2\pi \tilde{R}}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}$$

BFSS 中的 S^1 被 boost 到 Susskind 的 S^1，如果 boost 的同时让 $R_s \to 0$，boost 之后，类空的 S^1 变成光锥上的 S^1. 因原来 $D=11$ M-理论具有 Lorentz 不变性，Susskind 矩阵模型在 $N \to \infty$ 极限下等价于 BFSS 模型. Susskind 模型在 finite N 的情况下也具有 decoupling 性质 $\longrightarrow$ M-theory DLCQ.

代数事实 作用于 D 维时空的 Galilei 代数

$Gal(D-1,1)$ 同构于作用于 $(D+1)$ 维时空的 Poincaré 代数 $SO(D,1)\ltimes \mathbb{R}^{D,1}$ 的光锥子代数.

$$\eta_{ab} \quad (a,b=0,1,\cdots,D)$$

$$\eta_{+-}=\eta_{-+}=-1,\qquad \eta_{ij}=\delta_{ij}$$

$$P^{\pm}=\frac{1}{\sqrt{2}}(P^0\pm P^D),\qquad J^{\pm a}=\frac{1}{\sqrt{2}}(J^{0a}\pm J^{Da})$$

令 $K^i=J^{+i}$, $\{P^i, P^{\pm}, K^i, J^{ij}\}$ 闭合.

$$\begin{cases} [P^i,P^j]=[P^i,P^{\pm}]=[P^+,P^-]=0 \\ [J^{ij},P^k]=i(\delta^{ik}P^j-\delta^{jk}P^i),\quad [J^{ij},P^{\pm}]=0 \\ [P^i,K^j]=i\delta^{ij}P^+,\quad [P^+,K^i]=0=[K^i,K^j] \\ [P^-,K^i]=iP^i,\quad [J^{ij},K^k]=i(\delta^{ik}K^j-\delta^{jk}K^i) \end{cases}$$

$P^+=-P_-$ 与子代数的所有生成元对易，用一个中心代替

"光锥子代数"的推广　设 G 是一个一般的 Lie 代数，生成元为 T^A $(A=1,\cdots,\dim G)$

假定 G 包含了某个"光锥方向的生成元" P^+

$$P^+ = \sum_{A=1}^{\dim G} \xi^A T^A$$

$G_{LC} \subset G$ 定义为：

$$G_{LC} = \mathrm{Span}\{T \in G \mid [T, P_+] = 0\}$$

这样，P^+ 在 G_{LC} 中，与 G_{LC} 所有的生成元对易，故是个中心 $\rightarrow$ $P^+ = -\mu \mathbb{1}$.

命题：若 G 是某个单紧群的 Lie 代数，有 root system decomposition

$$G = \oplus_i H_i \oplus_{\alpha \in \Delta_+} (E_\alpha \oplus E_{-\alpha})$$

则 G_{LC} 中的元素均可写成线性组合形式：

$$\sum_{\alpha \in \Delta_+,\ \alpha(P^+)=0} (\lambda_\alpha E_\alpha + \lambda_{-\alpha} E_{-\alpha}) + \sum_i \lambda_i H_i$$

量子 level 上的 Boost 不变性

DLCQ 正则量子化

$$[\Phi(x^i, x^+),\ \Pi(\tilde{x}^i, x^+)] = i\delta(x-\tilde{x})$$

等"光锥时"对易关系. 与普通正则量子化

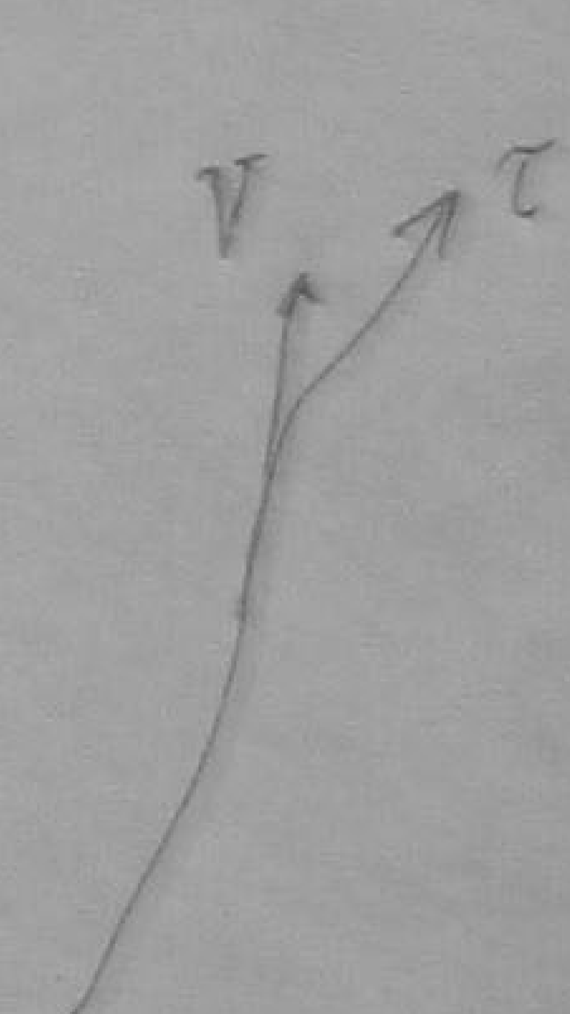
是否等价? Hellerman & Polchinski, Bilal

$$x^{\pm} = t \pm x \ ; \qquad \epsilon \sim R_s/R$$

引进新的时间坐标函数

$$\tau = \left(1+\frac{\epsilon^2}{2}\right)t + \left(1-\frac{\epsilon^2}{2}\right)x$$

$$= x^+ + \frac{\epsilon^2}{2}x^-$$



当 $\epsilon \neq 0$ 时 是类时的

$$\langle V, V\rangle = -\left(\frac{\partial\tau}{\partial t}\right)^2 + \left(\frac{\partial\tau}{\partial x}\right)^2$$

$$= -2\epsilon^2 < 0.$$

$\epsilon \to 0, \quad \tau \to x^+$ (光锥时间)

Near light-like 紧化条件

$$\begin{pmatrix} t \\ x \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} t \\ x \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2\pi R \\ -2\pi \tilde{R} \end{pmatrix}$$

对 τ 的条件:

$$\tau \sim \tau + 2\pi \left[(R - \tilde{R}) + \frac{\epsilon^2}{2} (R + \tilde{R}) \right]$$

利用 $\tilde{R} = \sqrt{R^2 + 2R_s^2}$, $\epsilon = \frac{R_s}{R}$

up to $O(\epsilon^2)$:

$$\begin{cases} R - \tilde{R} \sim R\left(1 - \sqrt{1 + \frac{2R_s^2}{R^2}}\right) \sim -\epsilon^2 R \\ \frac{\epsilon^2}{2}(R + \tilde{R}) \sim \epsilon^2 R \end{cases}$$

所以在 near light-like 方向上的时间 τ 非紧

$$x^- \sim x^- - 2\pi \tilde{R} \approx x^- - 2\pi R$$

以 (τ, x^-, x^i) 为坐标

$$ds^2 = -2dx^+dx^- + (dx^i)^2 = -2d\tau dx^- + \epsilon^2 (dx^-)^2 + (dx^i)^2$$

标量场:

$$\phi(\tau, x^-, x^i) = \frac{1}{\sqrt{2\pi R}} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \phi_n(\tau, x^i)\, e^{\frac{i n x^-}{R}}$$

动能项:

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} \int d\tau\, d^{D-2}x^i \Big(\epsilon^2 \partial_\tau \phi_n^* \partial_\tau \phi_n + \frac{2in}{R} \phi_n^* \partial_\tau \phi_n$$

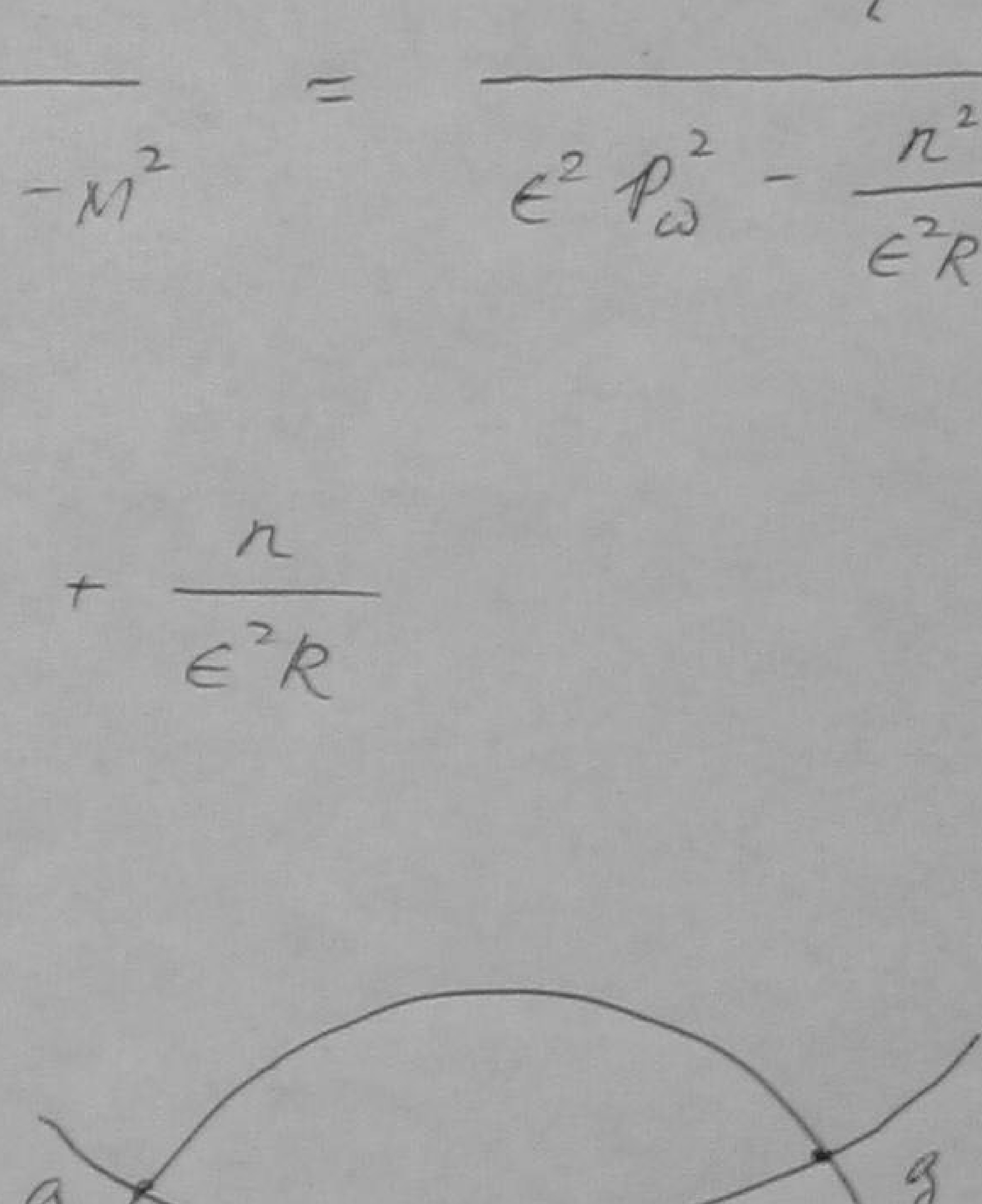
$$- \partial_i \phi_n^* \partial_i \phi_n - M^2 \phi^* \phi \Big)$$

传播子:

$$\frac{i}{\epsilon^2 p_\tau^2 + \frac{2n p_\tau}{R} - p_i^2 - M^2} = \frac{i}{\epsilon^2 p_\omega^2 - \frac{n^2}{\epsilon^2 R^2} - p_i^2 - M^2}$$

这里 $p_\omega \equiv p_\tau + \dfrac{n}{\epsilon^2 R}$

1-loop 振幅



当 $\epsilon \to 0$ 时, 零模 $n=0$ 贡献发散 (D-1维场论)

Newton-Hooke 对称性

dS_{D+1} : bulk gravity

$$
\boxed{
\begin{array}{l}
SO(D+1,1) \\
\quad \cup \qquad \text{限制到 } dS_D \\
SO(D,1) \\
\quad \Big\downarrow \ \text{Inönü-Wigner} \\
NH(D-1,1)
\end{array}
}
$$

建立以 $NH(D-1,1)$ 为对称群的量子力学 → 推广到矩阵理论；希望推广后的理论能给出 dS_{D+1} 引力的微观描述.

$SO(D,1)$ 的生成元

P^μ, $J^{\mu\nu}$ $\qquad (\mu,\nu = 0,1,\cdots,D-1)$

对易关系：

$$
\begin{cases}
[P^\mu, P^\nu] = \dfrac{i}{R^2} J^{\mu\nu} \\[2ex]
[J^{\mu\nu}, P^\lambda],\ [J^{\mu\nu}, J^{\lambda\rho}] \text{ 与 Poincaré 代数}
\end{cases}
$$

Substitutions:

$$\begin{cases} P^0 = -P_0 \Rightarrow -\left(c\mu \mathbb{1} + \frac{1}{c} H\right) \\ J^{0i} \Rightarrow c K^i , \quad R \Rightarrow c R \end{cases}$$

(如果 $D=3$，还可再引入一个 central charge κ

$$J^{ij} \Rightarrow J^{ij} - c^2 \kappa \epsilon^{ij} \mathbb{1} \quad)$$

最后令 $c \to \infty$，得到 Newton-Hooke 代数：

$$[P^i, P^j] = 0 \qquad \left(-i \frac{\kappa}{R^2} \epsilon_{ij} \mathbb{1}\right)$$

$$[K^i, K^j] = 0 \qquad (i \kappa \epsilon_{ij} \mathbb{1})$$

$$[H, K^i] = -i P^i , \quad [H, P^i] = -\frac{i}{R^2} K^i$$

$$[P^i, K^j] = -i\mu \delta^{ij} \mathbb{1} , \quad [J^{ij}, H] = 0$$

$$[J^{ij}, P^k] = i(\delta^{ik} P^j - \delta^{jk} P^i)$$

$$[J^{ij}, K^k] = i(\delta^{ik} K^j - \delta^{jk} K^i)$$

$$[J^{ij}, J^{mn}] = i(\delta^{im} J^{jn} + \delta^{jn} J^{im} - \delta^{in} J^{jm} - \delta^{jm} J^{in})$$

时空变换: $(x,t) \in \mathbb{R}^{D-1,1}$

$$\begin{cases} x^i \to x'^i = \Omega^i{}_j\, x^j + v^i R\,\mathrm{sh}\frac{t}{R} + a^i\,\mathrm{ch}\frac{t}{R} \\ t \to t' = t+b \end{cases}$$

这里,

$$(\Omega^i{}_j) \in SO(D-1) \longleftrightarrow J^{ij}$$

$$\begin{cases} a^i \in \mathbb{R}^{D-1} \longleftrightarrow P^i \\ v^i \in \mathbb{R}^{D-1} \longleftrightarrow K^i \\ b \in \mathbb{R} \longleftrightarrow H \end{cases}$$

$$\begin{cases} \exp(tH)\, P_i\, \exp(-tH) = \mathrm{ch}\frac{t}{R}\, P_i + \frac{1}{R}\,\mathrm{sh}\frac{t}{R}\, K_i \\ \exp(tH)\, K_i\, \exp(-tH) = \mathrm{ch}\frac{t}{R}\cdot K_i + R\,\mathrm{sh}\frac{t}{R}\cdot P_i \end{cases}$$

Hamiltonian 生成的时间流在虚轴上有周期 $\beta = 2\pi R \Rightarrow T_H = \frac{1}{\beta}$

单粒子系统（无中心记 k）

$$L = \frac{1}{2}\mu \dot{x}_i^2 + \frac{\mu}{2R^2} x_i^2$$

$$\ddot{x}_i - \frac{1}{R^2} x_i = 0$$

$$p_i = \frac{\partial L}{\partial \dot{x}^i} = \mu \dot{x}^i$$

$$H = p_i \dot{x}^i - L = \frac{1}{2\mu} p_i^2 - \frac{\mu}{2R^2} x_i^2$$

非正定 ±{ω̄, ω}

$$\begin{cases} \dot{x}_i = \{x_i, H\}_{P.B.} = \frac{1}{\mu} p_i \\ \dot{p}_i = \{p_i, H\}_{P.B.} = \frac{\mu}{R^2} x_i \end{cases}$$

Noether charges

$$\begin{cases} x^i \to \Omega^i{}_j x^j \\ t \to t + b \end{cases} \quad 不变$$

给出两个守恒量

$$\begin{cases} J^{ij} = x^i p^j - x^j p^i \\ H = \frac{1}{2\mu} p_i^2 - \frac{\mu}{2R^2} x_i^2 \end{cases}$$

$$\delta_v x^i = v^i R \,\mathrm{sh}\frac{t}{R} \qquad (v^i\text{: 无穷小量})$$

$$\delta_v L = \mu \dot{x}_i \delta_v \dot{x}^i + \frac{\mu}{R^2} x_i \delta_v x^i$$

$$= \mu v_i \frac{d}{dt}\left[x^i \,\mathrm{ch}\frac{t}{R}\right]$$

$$\Rightarrow \quad \boxed{K_i = \mu x_i \,\mathrm{ch}\frac{t}{R} - p_i R\,\mathrm{sh}\frac{t}{R}}$$

"平移"变换:

$$\delta_a x^i = a^i \,\mathrm{ch}\frac{t}{R}$$

$$\delta_a L = \frac{\mu}{R} a_i \frac{d}{dt}\left(x_i \,\mathrm{sh}\frac{t}{R}\right)$$

$$\Rightarrow \quad \boxed{P_i = p_i \,\mathrm{ch}\frac{t}{R} - \frac{\mu x_i}{R}\mathrm{sh}\frac{t}{R}}$$

可验证这些 J^{ij}, H, K_i, P_i 在 $\{\cdot,\cdot\}_{P.B.}$ 下满足 Newton-Hooke 对易关系.

Gibbons & Patricot: de Sitter 测地线方程取非相对论极限 → 运动方程

hep-th/0308200

有中心荷 κ ($D=3$; "bulk gravity" $dS_{D+1} = dS_4$)

$$L = \frac{\mu}{2}\dot{x}_i^2 + \frac{\mu}{2R^2}x_i^2 - \frac{\kappa}{2}\epsilon_{ij}\left(\dot{x}_i\ddot{x}_j + \frac{1}{R^2}x_i\dot{x}_j\right)$$

推广的 Euler-Lagrange 方程:

$$\kappa\epsilon_{ij}\dddot{x}^j - \mu\ddot{x}_i - \frac{\kappa}{R^2}\epsilon_{ij}\dot{x}_j + \frac{\mu}{R^2}x_i = 0$$

正则形式 (Ostrogradski formalism)

$$\begin{cases} p_i \equiv \dfrac{\partial L}{\partial \dot{x}_i} - \dfrac{d}{dt}\dfrac{\partial L}{\partial \ddot{x}_i} = \mu\dot{x}_i - \kappa\epsilon_{ij}\ddot{x}_j + \dfrac{\kappa}{2R^2}\epsilon_{ij}x_j \\ \tilde{p}_i \equiv \dfrac{\partial L}{\partial \ddot{x}_i} = \dfrac{\kappa}{2}\epsilon_{ij}\dot{x}_j \end{cases}$$

p_i 共轭于 x_i, $\tilde{p}_i$ 共轭于 $\dot{x}_i$. 相空间是

8维的:

$$\Omega = \{x_i, \dot{x}_i, p_i, \tilde{p}_i\}$$

$$H \equiv \dot{x}_i p_i + \ddot{x}_i\tilde{p}_i - L$$

$$= -\frac{2\mu}{\kappa^2}\tilde{p}_i^2 - \frac{2}{\kappa}\epsilon_{ij}p_i\tilde{p}_j + \frac{1}{R^2}x_i\tilde{p}_i - \frac{\mu}{2R^2}x_i^2$$

假如相空间无约束条件，则可用 Poisson 括号

$$\{x_i, p_j\}_{P.B.} = \{\tilde{x}_i, \tilde{p}_j\}_{P.B.} = \delta_{ij}$$

实际上，这是一个约束系统

$$\varphi_i \equiv x_i + \frac{2}{k}\epsilon_{ij}\tilde{p}_j = 0$$

引进：

$$C_{ij} = \{\varphi_i, \varphi_j\}_{P.B.} = -\frac{4}{k}\epsilon_{ij}$$

$$(C^{-1})_{ij} = \frac{k}{4}\epsilon_{ij}$$

Dirac 括号

$$\{f, g\}_D \equiv \{f, g\}_{P.B.} - \{f, \varphi_i\}_{P.B.}(C^{-1})_{ij}\{\varphi_j, g\}_{P.B.}$$

$\rightarrow$ symplectic structure on $\Omega_{red} = \Omega/\{\varphi_i = 0\}$

$$\{x_i, x_j\}_D = \frac{1}{k}\epsilon_{ij}, \quad \{\tilde{p}_i, \tilde{p}_j\} = \frac{k}{4}\epsilon_{ij}$$

$$\{\tilde{x}_i, \tilde{p}_j\}_D = \frac{1}{2}\delta_{ij}$$

推广到矩阵

$$x^i \longrightarrow X^i \qquad N\times N \text{ hermitian } 矩阵$$

$$L = \mathrm{Tr}\left\{ \frac{\mu}{2}(\dot{X}^i)^2 + \frac{\mu}{2R^2}(X^i)^2 + \frac{\mu}{4g^2R^4}[X^i, X^j]^2 + \cdots \right\}$$

这里 $g = G\Lambda^{(D-1)/2}$ 是 bulk 引力的无量纲耦合常数 (dS_{D+1} 作为 bulk).

Newton - Hooke 不变性:

$$X^i \to X^i + \left(v^i R \,\mathrm{sh}\frac{t}{R} + a^i \,\mathrm{ch}\frac{t}{R}\right) \mathbb{1}_{N\times N}$$

若干可解的性质

(1) 在平空间情形, 静态方程是

$$[X^j, [X^i, X^j]] = 0$$

X^i 是互相对易的矩阵，可同时对角化

本征值 $x_1^i, \cdots, x_N^i$ 描述 N 个静止的 D0 branes.

在我们的情形，静态方程变为：

$$[X^j,[X^i,X^j]]+g^2R^2X^i=0$$

解为 fuzzy spheres:

$$X^a=\frac{g^2R^2}{2}J^a \qquad (a=1,2,3)$$

$$[J^a,J^a]=i\epsilon^{abc}J^c \qquad (SU(2)\text{ 生成元})$$

半径（平方）： $L^2=\frac{1}{2}g^2R^2C_2(J)$

静态能量： $E=-\frac{N}{8}g^2\mu C_2(J)$

能量最低：当 X^a 作为 J^a 的 N-维矩阵表示是不可约的时候

$$\begin{cases} E_{min}=-\frac{1}{32}g^2\mu\cdot N(N^2-1) \\ L^2=\frac{1}{8}g^2R^2(N^2-1) \end{cases}$$