

String - Branes - 理论方法

在凝聚态物理中应用

IQHE. Kubo 公式, NCG, MBZ.

FQHE. Laughlin 波函数

Susskind

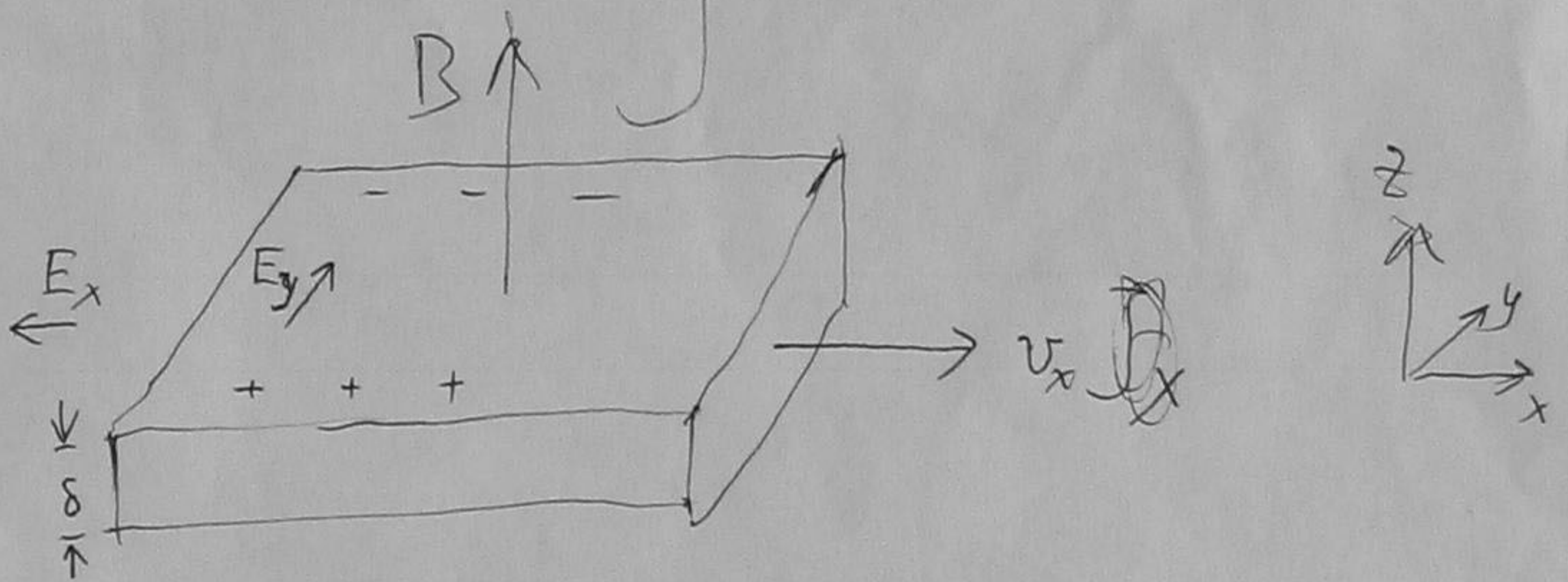
S.C. Zhang

String, Branes - 理论方法

在凝聚态物理中的应用

Susskind S.C. Zhang

QHE



\uparrow B 加 B

\uparrow $-x$ E_x 使电子 e ($q = -e < 0$) 沿 x 方向运动速度 v .

受 Lorentz 力
$$\vec{F} = -e(\vec{E} + \frac{1}{c}\vec{v} \times \vec{B})$$

使正负电荷在边缘堆积，稳定状态时

$$F_y = 0, \quad E_y = \frac{1}{c} v B$$

$$J_x = -n\delta e v = \sigma_{xx} E_x + \sigma_{xy} E_y$$

横向电阻
$$\sigma_{xy} = \frac{J_x}{E_y} = -\frac{n\delta e c}{B}$$

判断符号

低温 强磁场

自由电子受洛伦兹力以回旋运动，形成 Landau 能级

$$L(\vec{r}, \dot{\vec{r}}, t) = \frac{1}{2} m \dot{\vec{r}}^2 + \frac{q}{c} \dot{\vec{r}} \cdot \vec{A} - q\phi$$

选对称规范 $A_i = -\frac{1}{2} B \epsilon_{ij} x^j$

坐标 x^i 共轭动量 $p^i = \frac{\partial L}{\partial \dot{x}^i} = -\frac{1}{2} \frac{q}{c} B \epsilon_{ij} x^j$

坐标间不可交换：非交换几何

$$[x, y] \neq 0 \quad \pi_x = -i\hbar \partial_x = \frac{eB}{2c} y$$

令 $z = (x + iy) / \sqrt{2} l_B$ $l_B = \sqrt{\frac{\hbar c}{eB}}$ LLL 经典回旋半径

$$a = \frac{1}{\sqrt{2}} (z + \bar{\partial}) \quad \left. \vphantom{a} \right\} [a, a^\dagger] = 1$$

$$a^\dagger = \frac{1}{\sqrt{2}} (\bar{z} - \partial) \quad H = \frac{1}{2m} \vec{\pi}^2 = \hbar \omega_c (a^\dagger a + \frac{1}{2})$$

均匀磁场，电子具有对称性

$$\omega_c = \frac{eB}{mc}$$

Landau 能级无穷密

每个单位面积电荷数： $\frac{1}{2\pi l_B^2} = \frac{eB}{hc}$ $\uparrow \hbar \omega_c$ LLL

QHE.

$$[x, y] = i\hbar \frac{c}{eB} = i l_B^2$$

$$l_B = \sqrt{\frac{\hbar c}{eB}}$$

LLL 经典回旋半径

$$= \sqrt{\frac{\hbar}{m\omega}}, \quad \omega_B = \frac{eB}{mc}$$

$$\pi_x = -i\hbar \partial_x + \frac{e}{c} A_x, \quad \pi_y = -i\hbar \partial_y + \frac{e}{c} A_y$$

$$H = \frac{1}{2m} \vec{\pi}^2$$

$$[\pi_x, \pi_y] = -i\hbar \frac{e}{c} (\partial_x A_y - \partial_y A_x) = i\hbar \frac{eB}{c}$$

均匀磁场, 平移对称性,

当选规范可破坏平移对称性, 将平移结合规范变换得新平移.

$$\zeta = (x+iy) / \sqrt{2} l_B$$

与 a, a^\dagger 对应的 $(\#) H = \frac{1}{2m} \vec{\pi}^2$ 对应的

$$\left. \begin{aligned} a &= \frac{1}{\sqrt{2}} (z + \bar{\partial}) \\ a^\dagger &= \frac{1}{\sqrt{2}} (\bar{z} - \partial) \end{aligned} \right\} [a, a^\dagger] = 1$$

$$\left. \begin{aligned} b^\dagger &= \frac{1}{\sqrt{2}} (z - \bar{\partial}) \\ b &= \frac{1}{\sqrt{2}} (\bar{z} + \partial) \end{aligned} \right\} [b, b^\dagger] = 1$$

$$[b, H] = [b^\dagger, H] = 0$$

为回旋轨道中心平移算子.

平衡角动量算子 $J = -ix^i \epsilon^{ij} \partial_j = b^\dagger b - a^\dagger a$

LLL 波函数 其完备基可用角动量本征值表示

$$\psi_l(z, \bar{z}) \sim z^l e^{-|z|^2/2}, \quad \psi_{nl} = \sqrt{\frac{n!}{\pi(n+l)!}} z^l L_n^l(|z|^2) e^{-|z|^2/2}$$

与 H 本征态: 与 π 共轭的平移算子 $\vec{P} = \vec{p} - \frac{e}{c} \vec{A}$
 $\vec{\pi} = \vec{p} + \frac{e}{c} \vec{A}$

在规范规范, 电子回旋轨道中心坐标

$$x_0 = x - \frac{c}{eB} \pi_y = -\frac{c}{eB} p_y$$

$$y_0 = y + \frac{c}{eB} \pi_x = \frac{c}{eB} p_x$$

$$[x_0, y_0] = i\hbar \frac{c}{eB} = i l_B^2$$

轨道中心坐标与 H 对应正体观量子空间均匀性.

用元算子表示 $b = \frac{1}{\sqrt{2}} (\bar{z} + \partial)$

通过样品总磁通 $\Phi = BS$

样品 LL 电荷序度 $N_B = \frac{\Phi}{\phi_0} = \frac{eBS}{hc}$

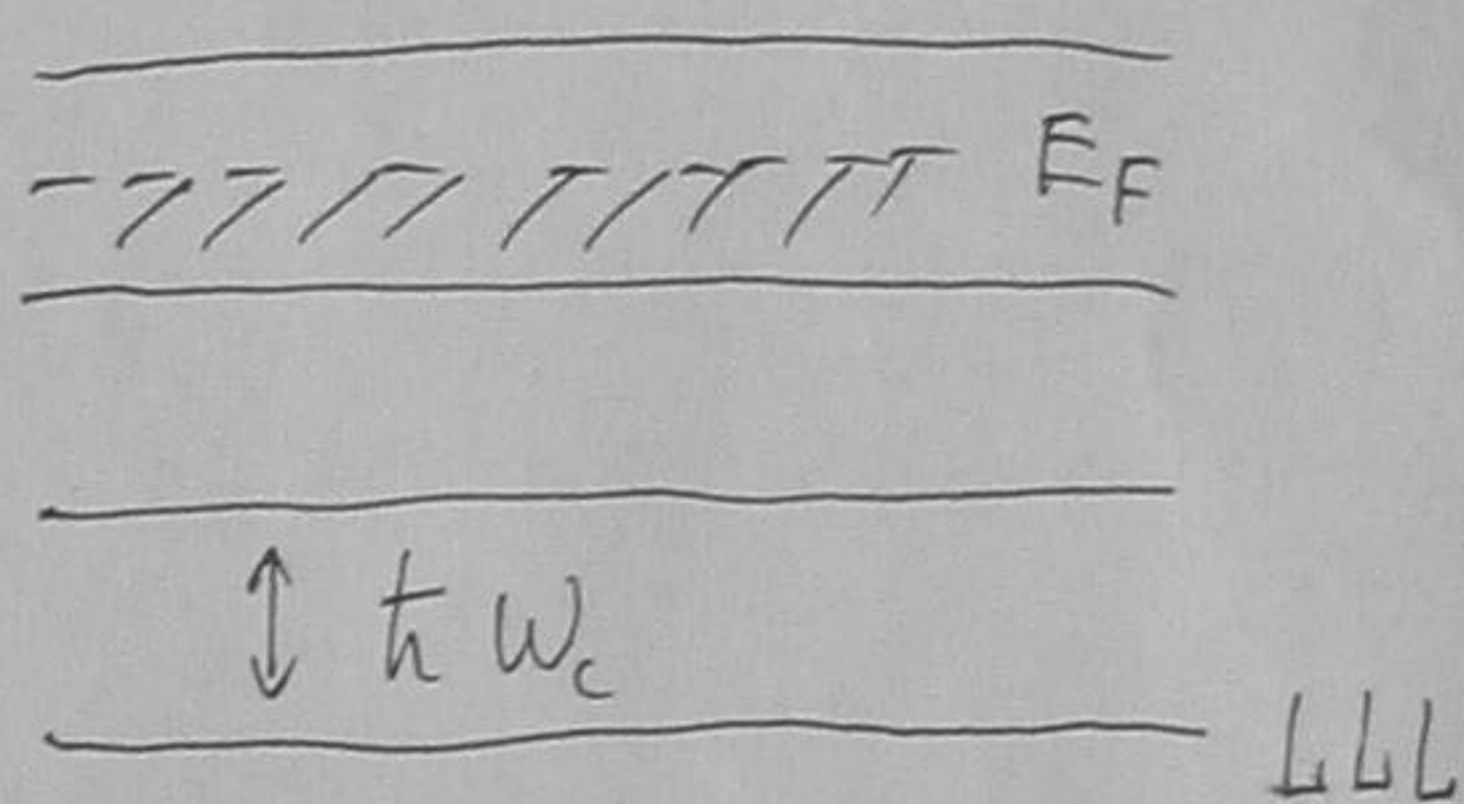
$\phi_0 = \frac{hc}{e}$ 磁通量子

样品中自由电子总数 $N = n \cdot \delta \cdot S$

低温, $T=0$. 电子服从 Fermi 统计, 从最低能级填到 Fermi level E_F

N 电子可填充 LL 数

$$\nu = \frac{N}{N_B} = \frac{n \delta hc}{eB} \quad \text{填充因子}$$



当 B 增强, 每 Landau 级电荷序度 N_B 增大, ν 减少.

Hall 电阻率

$$\sigma_{xy} = \frac{n \delta e c}{B} = \nu \frac{e^2}{h}$$

$$= \frac{\nu}{R_H}, \quad R_H = \frac{h}{e^2} \quad \text{为 Hall 电阻.}$$

σ_{xy} 随填充因子成比例 $\propto \frac{e^2}{4}$.

1980年 Klitzing 等在 MOS 场效应管表面

1.5°K, 磁感应强度 $B (> 1 \text{ Telse})$

随 $B \uparrow$, $N_B \uparrow$, ρ_{xx} 在 $4, 3, 2, 1$ 处

出现 L-型平台

发现 σ_{xy} 随 B 的线性比例关系, Hall 平台

纵向电阻是随 B 接近于零

IQHE. 标准电阻

与自由载流子浓度 n .

$B \uparrow$, $N_0 \uparrow$, $E_F \downarrow$ 使得 n LL 刚好填满, E_F 上有杂质
能级, 杂质不可解. 不可解的杂质能级

但: 杂质能级, 可掺杂电子成为局域态, ~~不可解~~.

可以改变 n : 改变局域态填充

不改 n Hall 电阻, 出现平台.

而当 Hall 电阻由 $-1/e^2$ 变为 $1/e^2$ 时, 局域态
密度分布, 引起纵向电阻降低.

IQHE 存在比较完整的理论分析.

唯分程 Brillouin 区

线性响应: 处于 E_F 下 LL 态电子对电导贡献. Kubo 公式

$$\sigma_{xy} = \frac{e^2 \hbar}{i} \sum_{\alpha < \beta} \frac{(V_y)_{\alpha\beta} (V_x)_{\beta\alpha} - (V_x)_{\alpha\beta} (V_y)_{\beta\alpha}}{(E_\alpha - E_\beta)^2}$$

$$(V_i)_{\alpha\beta} = \frac{1}{\hbar} \langle \alpha | \frac{\partial H(k_1, k_2)}{\partial k_j} | \beta \rangle$$

$$\sigma_{xy} = \frac{e^2}{i\hbar} \int_{MBZ} d^2k \vec{\nabla}_k \times \vec{A}(k_1, k_2)$$

$$\vec{A}(k_1, k_2) = \int d^3x \vec{u}_{k_1, k_2}^\dagger \nabla_k \vec{u}_{k_1, k_2} = \langle u_{k_1, k_2}^\dagger | \vec{\nabla}_k | u_{k_1, k_2} \rangle$$

$$\vec{A} = -c_1 \frac{e^2}{h}$$

即 u_{k_1, k_2}^\dagger 为 MBZ 的 (在 \vec{k} 方向) 的归一化波函数 T_0^2

上 $U(1)$ 的规范。

$\vec{A}(k_1, k_2)$ 为规范势， $\vec{\nabla}_k \times \vec{A}(k_1, k_2)$ 为规范场

$$c_1 = \frac{i}{2\pi} \int_{MBZ} d^2k \vec{\nabla}_k \times \vec{A}(k_1, k_2) = Ch(P_F)$$

P_F 为费米子所占于 E_F 的 Landau 能级

近 E_F 的投影子。

E_F 处于 Landau 能级间时，该场的量子化表示为 $U(1)$ 的规范场。即为 Hall 平台。

FRHE.

1982年有場才用更佳 GaAs - 奇度係最

更位

用更高磁場強度

發現 $\sigma_{xx}/\sigma_{yy} = \frac{1}{3}, \frac{2}{3}, \frac{3}{3}, \dots$ 出現平台

同時出現纵向电阻随 ν 變

(平台磁場和 ν 成 $\sigma_{xx}/\sigma_{yy} \sim 10^{-5}$) 磁阻 $\sigma_{xx}/\sigma_{yy} \sim 10^{-5}$

磁阻 B , $N_B > N$

$\nu = N/N_B$ 磁阻 磁阻平台!

磁阻平台形成條件及磁阻平台:

$\nu = \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \dots$

磁阻平台 ν 不可在磁阻平台中, 磁阻平台

ν 磁阻平台, 用磁阻平台(磁阻)磁阻平台,

磁阻平台磁阻平台,

磁阻 - 磁阻相互作用可忽略,

磁阻平台磁阻平台, 磁阻平台磁阻平台

磁阻

L. Smolin, Depth 10-102, Non-Com. Chern-Simons Theory

磁阻磁阻 磁阻磁阻 (19.2) 磁阻

磁阻 磁阻磁阻, 磁阻磁阻, 磁阻磁阻

FQHE: 更低维

具更高迁移率样品

电子强关联, 开} 或新致态基态.

$$H = \sum_j \left\{ \frac{1}{2m} (-i\hbar \nabla_j + \frac{e}{c} \vec{A}_j)^2 + V(\vec{r}_j) \right\} + \sum_{i < j} \frac{e^2}{r_{ij}}$$

66级: $\hbar\omega_c$, $\frac{e^2}{\epsilon l_B}$, $g\mu_B B$ 自旋磁化 Zeeman 项.

更低维, 强关联 $\hbar\omega_c > \frac{e^2}{l_B}$, 二体互作用微扰处理

电子部分结构 + LLL, 先采用单电子近似分析 $n=0, l=k$

$$\psi_k(z) = z^k e^{-|z|^2/2}$$

自旋已取化, 相互对称
空间位置反对称

在 LLL, 在有互作用时 Laughlin 波函数

$$|m\rangle = \prod_{j < k} (z_j - z_k)^m e^{-\frac{1}{2} \sum_{\alpha=1}^N |z_\alpha|^2} \quad m \text{ 为奇整数.}$$

在新 FQHE 基态及基态的激发 (准粒子) 的配重互作用

形式简单而具深刻意义.

有一大群吃意顿电子以 Laughlin 波函数为基态. 例: (LW)

1.) = 电子气体 (Plasma)

由 LW 构造的 N 电子气体的几率分布

$$P(z_1, \dots, z_N) = |\Psi_m(z_1, \dots, z_N)|^2$$

$$= \exp \left\{ - \sum_{l=1}^N |z_l|^2 + \sum_{i < k}^N z_i \ln |z_i - z_k| \right\}$$

$$= \exp \left\{ -m \left[\frac{1}{m} \sum_l |z_l|^2 - 2 \sum_{i < k}^N \ln |z_i - z_k| \right] \right\} = \exp(-m U)$$

$$U = \frac{1}{m} \sum_{l=1}^N |z_l|^2 - 2 \sum_{i < k}^N \ln |z_i - z_k|$$

满足 2D Laplace eq. $\Delta U = \frac{1}{m} - 4\pi \sum_{j \neq k} \delta^2(z_j - z_k)$

2D 电子气体, 带电荷 $q = -1$ 粒子是静电势的解。

正电荷粒子的正电势的本底作用, 正电本底密度 $\rho_0 = \frac{1}{4\pi m}$

负电荷粒子的解: $V(z; -z_k) = -2 \ln |z; -z_k|$.

2.) = 电子气体的量子波函数设计. 仅 m 为奇数由 LW 构造的几率分布 $\frac{1}{Z} \sum_{\mathbf{z}} \exp(-m U)$, 表明当 $m=1, 3, 5, \dots$ 时, 电子平均的 $\frac{1}{N} \sum \epsilon_i$ 有一极大尖峰 (Cusp)

3.) 用 δ -函数作用代替库仑作用, 这是精确的.

4.) 中体由子设计构造的.

5.) 将 LW 看成 -1D 位置坐标 $x_l = \text{Re } z_l$ 的函数
是 Calogero 可积模型类型的势

$$H = \frac{1}{2} \sum_l p_l^2 + \frac{1}{2\theta^2} X_l^2 + \frac{1}{2} \sum_{j < k} \frac{m(m+1)}{(x_j - x_k)^2}$$

此可积模型具有有限能隙激发态 (孤子等)

可将激发态与 Laughlin 波函数的粒子

激发态对应。

例: 量子霍尔 = 电子流

零磁通以忽略电子间作用, 且 $\nu = \frac{N}{N_0} < 1$. 在 LL 态 (Landau Level) 中

当讨论电子间相互作用, 需解方程

$\nu = \frac{1}{m} = \frac{N_0}{N}$ 为有理数, 具有稳定性

可形成不可压缩流体状态, 称量子 Hall 态 (QHE)

IQHE 可用 Kubo 公式计算电导

FQHE 没有类似电导计算公式

Laughlin 波函数为分析 FQHE 提供好的出发点

但 FQHE 中仍有许多问题未解决

需新思想, 新思路, 新模型

1. 空间量子化 高维空间的 CS 效应. Anyon \mathbb{Z}_2 .

2. Susskind NC-CS 理论

量子化理论. Branes 是 p 维 \mathbb{Z}_2 的量子化.

3. S. C. Zhang

将 2-维 量子化理论推广到 4-维 \rightarrow 8 维.

1-rst Hopf bundle $S^3/S^1 = S^2 = CP^1$

2-nd Hopf bundle $S^7/S^3 = S^4 = HP^1$

3- ... $S^{15}/S^7 = S^8 = OP^1$

$S^1/\mathbb{Z}_2 = S^1 = RP^1$

$$\pi_{2n-1}(S^n) = \mathbb{Z}^{\oplus}$$

the last QHE with a rich structure, and

points to connections with the world of string theory, ...

reserved for a future, longer publication.

Berry phase (几何因子). 量子化理论, 拓扑量子.

1. 1982年 Wilczek 在二维平面上
发现了 ν 量子霍尔效应的理论: Anyon

N个 Anyon 体系

①
$$H = \sum_{j=1}^N \frac{1}{2m} \left[-i\hbar \frac{\partial}{\partial \vec{x}_j} - \frac{2\hbar}{c} \sum_k A^a(\vec{x}_j, -\vec{x}_k) \right]$$

其中
$$\sum_k A^a(\vec{x}_j, -\vec{x}_k) = \frac{\Phi}{2\pi} \sum_k \frac{\epsilon^{ab}(\vec{x}_j - \vec{x}_k)}{|\vec{x}_j - \vec{x}_k|^2} \equiv A^a(\vec{x}_j)$$

相互作用 $\vec{x}_j \leftarrow$ Anyon 上的荷量子流。

②
$$L = \sum_{j=1}^N \left\{ \frac{m}{2} \dot{\vec{x}}_j^2 + p \left[-A^a(\vec{x}_j) + \dot{\vec{x}}_j \cdot A^a(\vec{x}_j) \right] + \frac{\kappa}{2} \int d^2y \epsilon_{abc} A^a(y) \partial_b A^c(y) \right\}$$

将矢量 $A^a = (A^1, A^2)$ 与标量 A^0 组成 \vec{A} 量以方便计算。

于是由 Chern-Simons 型作用量:

不含二维面的度规项量, 且有 Scale 不变性。
不依赖于粒子的位置运动方程, 但决定粒子的统计性质和统计因子。

③ 对 A^a 是 \vec{A} ($a=0,1,2$) 的:
$$\sum_j p \dot{\vec{x}}_j^a \delta^2(y - \vec{x}_j) = -\frac{\kappa}{2} \epsilon_{abc} f^{bc}(y)$$

$$f^{ab}(y) = \partial_a A^b - \partial_b A^a$$

对 A^0 是守恒流条件:
$$\sum_j p \delta^2(y - \vec{x}_j) = \frac{\kappa}{2} \epsilon_{ab} \partial_a A^b(y) \equiv p \rho(y)$$

对守恒流 ρ 的:
$$pN = \kappa \int d^2y f_{0a}(y) = \kappa \Phi$$

Φ 为磁通 CS 磁通, 而每个粒子平均磁通 $\phi = \frac{\Phi}{N} = \frac{\hbar}{\nu \kappa}$

但粒子在运动中互相缠绕而得附加相位, 使
粒子间相互作用可这样计算。

2. NC-CS 理论

Sunkind et al. Hypth 0101029, 0010105.
0108076

Eulerian description

将粒子 x_i 用场 $x_i(y_i)$ 描述, 粒子的运动方程

粒子在底空间 (x 的 y 空间) 到靶空间 x 空间的映射

Lagrangian description

y 和 z 共-moving coordinates.

不可压缩, 单位面积粒子数 ρ_0 , 非定域子数 $\theta = \frac{1}{2\pi\rho_0}$

靶空间 x 和量子相空间, 由于存在带隙 θ , 非定域子数 $\frac{1}{2\pi}$.

x 空间粒子的密度为 $\rho = \rho_0 \left| \frac{dy}{dx} \right|$

$$L = \int dy \left\{ \frac{m}{2} \dot{x}^2 - V(\rho_0 \left| \frac{dy}{dx} \right|) \right\}$$

$V(\rho_0 \left| \frac{dy}{dx} \right|)$ 产生了不可压缩流体的运动方程, L 在 y 空间守恒

和空间坐标系下是规范不变性.

$$\delta y_i = f_i(y) = \epsilon_{ij} \frac{\partial \Lambda(y)}{\partial y_j}$$

$$\delta x_a = \frac{\partial x_a}{\partial y_i} f_i(y) = \epsilon_{ij} \frac{\partial x_a}{\partial y_i} \frac{\partial \Lambda(y)}{\partial y_j}$$

$\Lambda(y)$ 是粒子规范子数

对运动方程的设定平衡 $x_i = y_i$ 作变换:

$$x_i = y_i + \epsilon_{ij} \frac{\partial \Lambda_j}{2\pi\rho_0}, \quad \int d\Lambda_j = 2\pi\rho_0 \frac{\partial \Lambda}{\partial y_j}$$

在外场作用下, 粒子的运动中补充 MS 场的作用项.

$$e \vec{x} \cdot \vec{A} = \frac{eB}{2} \epsilon_{ab} x_a x_b \quad (\text{因为 } \vec{A} = \frac{B}{2} \epsilon_{ij} x_j)$$

即补充项 $L' = \frac{eB}{2} \int dy \rho_0 \epsilon_{ab} x_a x_b$

将①代入, 并选择适当的时间坐标使得:

$$L' = \frac{eB}{8\pi^2\rho_0} \int dy \epsilon_{ab} d_a d_b = \frac{\kappa}{4\pi} \int dy \epsilon_{ab} d_a d_b, \quad \kappa = \frac{eB}{4\pi\rho_0} = \frac{1}{\nu}$$

即 CS 作用量, $\kappa = \frac{1}{\nu}$ 称为 CS level, 当 ν 为整数时, 则 L' 为规范不变量.

由于y轴同率身不可压缩, 仅对x轴作面状微分同率变形.
y轴同率身非压缩时 $\theta = \frac{1}{2\pi\rho}$ 的轴对称空同.

例4 C-S 作用量 $\frac{1}{2} \int \dots$

NC-C S 作用量

$$L' = \frac{1}{4\pi\nu} \epsilon_{\mu\nu\rho} \left[\frac{\partial A_\mu}{\partial y_\rho} - \frac{\theta}{3} \{A_\mu, A_\nu\} \right] A_\nu$$

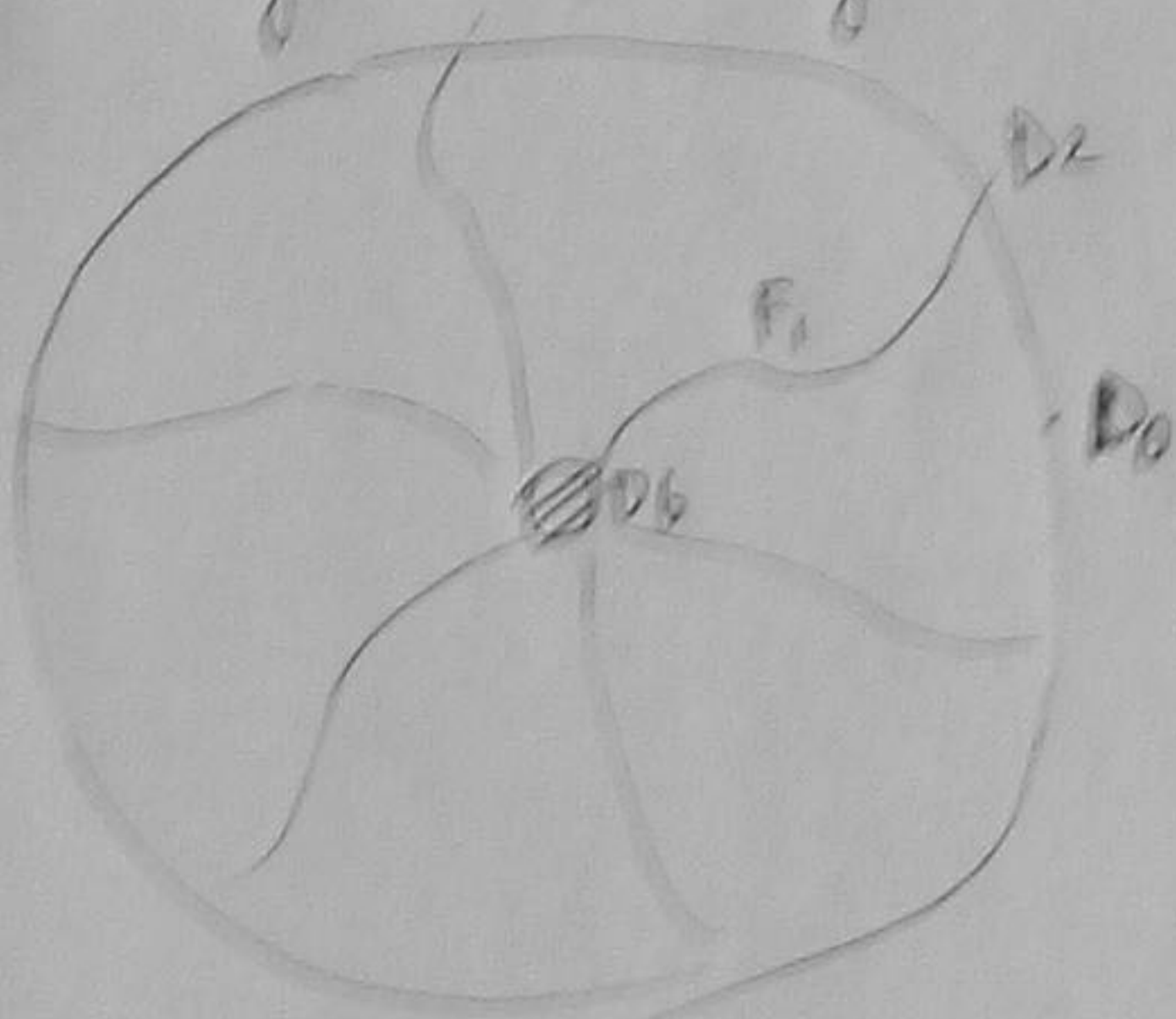
II A string

K D6-branes in (t, Y^a) $a=4, \dots, 9$ in $X^i=0$ $i=1, 2, 3$

D2-brane wrapped on S^2 : $\sum_{i=1}^3 X^i{}^2 = r^2$

K fundamental strings connecting D6s and D2

K D6 ~ B
N D0 ~ N



D6 as magnetic monopole at $X^i=0$

$$\int_{S^2} \tilde{H}_2 = 2\pi K \mu_6 \quad \mu_6 \text{ D6-brane charge}$$

\tilde{H}_2 coupled to D2-brane worldvolume gauge field A_μ :

$$\frac{\mu_2}{2} \int_{S^2} \epsilon^{\alpha\beta\gamma} (2\pi\alpha') A_\mu \tilde{H}_{\alpha\beta\gamma} = \int_{S^2} J^\alpha A_\alpha$$

Tension of the D2-brane and K strings cause D2-brane to collapse,

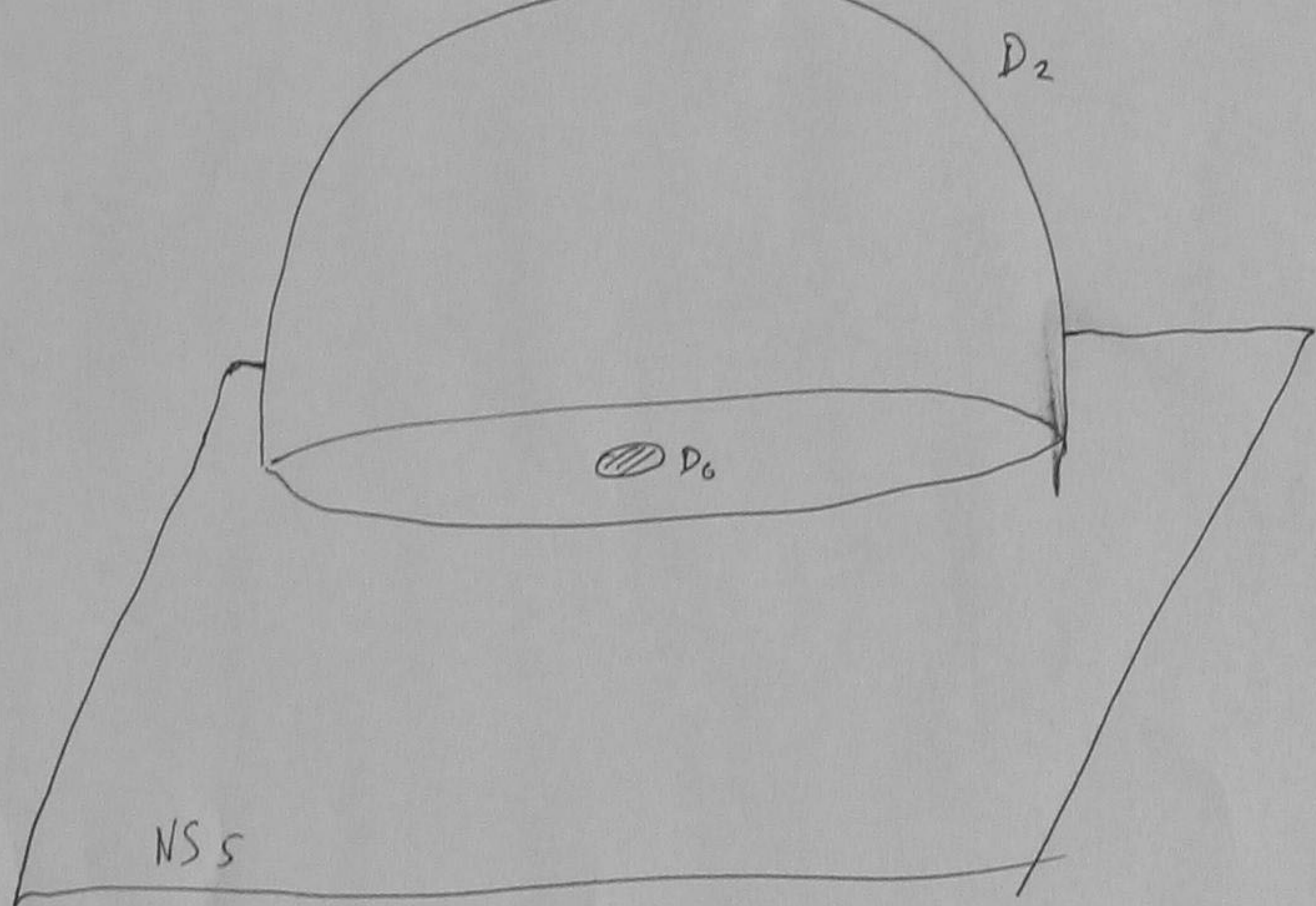
To counteract this add D0-branes dissolved in D2-brane.

D0-brane give rise to a magnetic flux on the D2-brane worldvolume

D6, D0 repel, repulsion can stabilize the radius of D2-brane.

→ Quantum Hall State

D2-brane as an incompressible fluid of D0-brane and charged string ends moving on it.



为分析物品上的流，引入 NS5-brane 的 X^1, X^2, Y^1, Y^2, Y^3
 位于固定坐标点

\dot{X} D_2 于边界: $X^3 = 0$
 $(X^1)^2 + (X^2)^2 = r^2$

5-brane acts as a boundary for D_2 -brane,
 D_0 -brane can escape from the D_2 -brane into 5-brane
 and will escape to infinity along the 5-brane.
 existence of an edge with the characteristic massless
 chiral edge states of Quantum Hall system.

5-brane is a small perturbation on the metric of
 the K D_6 -branes. The fluid of string-ends near the 5-brane
 can be described by a 1+1 dim CFT.