Λ-经典理论决定论的丢失
(宇宙监督假设和进展)

曹利明

湖州会议, 2018年11月23日

主要内容

- 奇异性定理
- 弱宇宙监督假设(WCC)
- 强宇宙监督假设(SCC)
- 强宇宙监督假设的最新进展
- 总结和讨论

在广义相对论的框架下时空的奇异性是不可避免的。

弱宇宙监督假设---遥远观测者不会受到奇点的任何影响。

强宇宙监督假设---保证经典理论的可预测性。

奇异性定理

- 经典解中的奇异性
- 引力坍缩中的奇异性
- 奇异性定理
- 关于奇异性的进一步讨论

奇异性定理

- 经典解中的奇异性
- 引力坍缩中的奇异性
- 奇异性定理
- 关于奇异性的进一步讨论

施瓦西解中的奇异性

施瓦西度规（1916）

$$ds^2=-\left(1-\frac{2m}{r}\right)dt^2+\left(1-\frac{2m}{r}\right)^{-1}dr^2+r^2(d\theta^2+\sin^2\theta d\varphi^2),$$

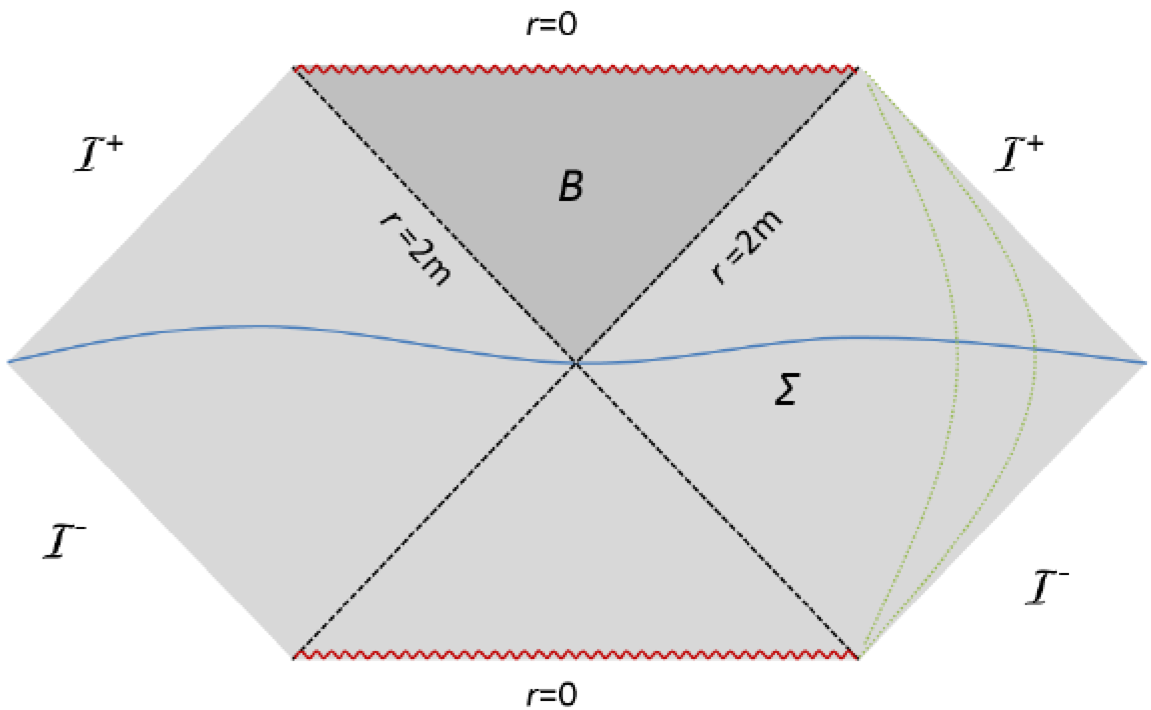
其中

$$r=(A/4\pi)^{1/2}$$

Kreshmann标量

$$R_{abcd}R^{abcd}=\frac{48m^2}{r^6}.$$

施瓦西时空的最大延拓



20年代, Eddington; 30年代, Lamaitre; 50年代, Synger, Finkerstein; 60年代, Kruskal 和 Szekeres.

Kerr-Newmann解中的奇异性

Kerr-Newmann解族（1963，1965）

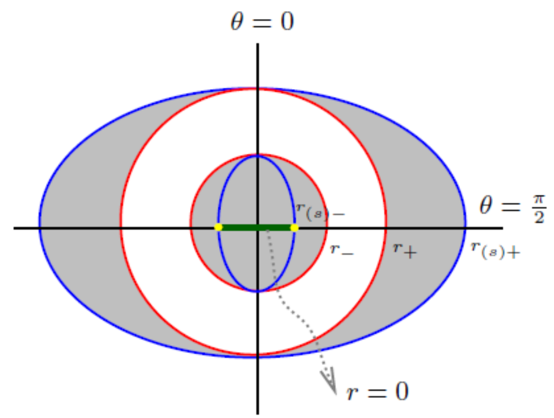
$$\mathrm{d}s^2 = -\mathrm{d}t^2 + \frac{\Sigma}{\Delta}\mathrm{d}r^2 + \Sigma\mathrm{d}\theta^2 + (r^2 + a^2)\sin^2\theta\mathrm{d}\varphi^2$$

$$+\frac{2mr}{\Sigma}(\mathrm{d}t - a\sin^2\theta\mathrm{d}\varphi)^2,$$

其中

$$\Sigma = r^2 + a^2\cos^2\theta,$$

$$\Delta = r^2 - 2mr + a^2 + e^2,$$



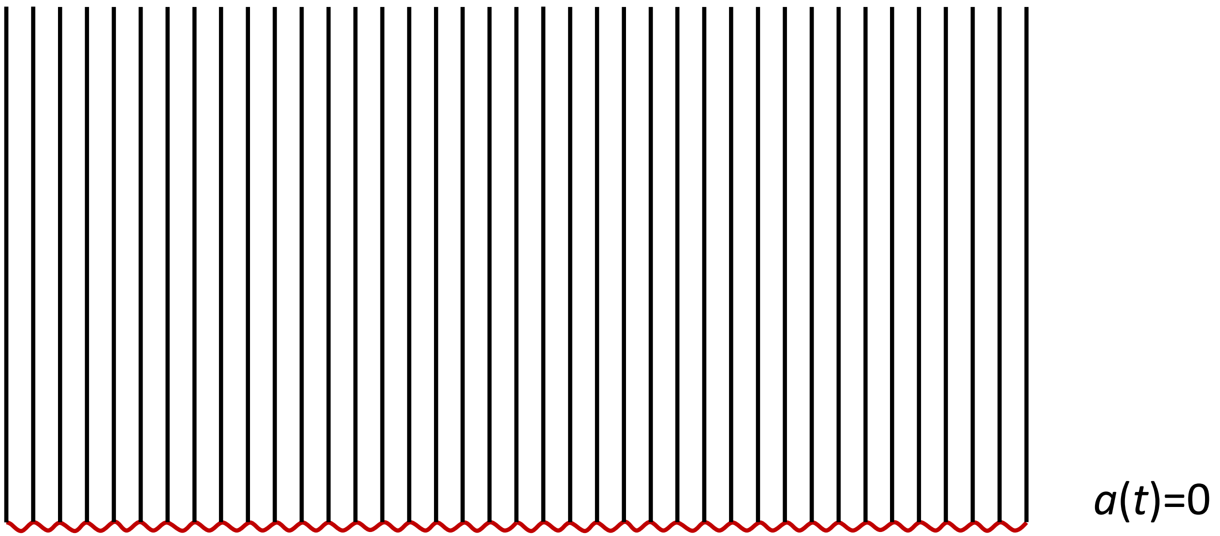
Kerr时空中的曲率奇异

$$R_{abcd}R^{abcd} = \frac{48m^2(r^2 - a^2\cos^2\theta)[(r^2 + a^2\cos^2\theta)^2 - 16r^2a^2\cos^2\theta]}{(r^2 + a^2\cos^2\theta)^6}.$$

Kerr-Newmann解的最大延拓, Carter.

FLRW宇宙的奇异性

对常见的物质模型，FLRW宇宙的具体解表明宇宙早期存在奇异。



奇异性定理

- 经典解中的奇异性
- 引力坍缩中的奇异性
- 奇异性定理
- 关于奇异性的进一步讨论

球对称引力坍缩中的奇异性

1930年左右，朗道、钱德拉塞卡研究了星体的引力坍缩和可能抗衡引力坍缩的物理机制。钱德拉塞卡考虑了电子简并压，并计算了形成白矮星的临界质量。

1938年，奥本海默、沃尔科夫利用爱因斯坦引力场方程研究了球对称引力坍缩的问题，给研究了形成中子星的临界质量。

1939年，奥本海默和斯奈德进一步研究了尘埃物质的动力学引力坍缩，并给出结论：当星体质量足够大，没有什么可以阻止星体坍缩成施瓦西奇点。

产生奇异性的原因是什么：对称性？物质场？什么情况下奇异性可以避免？

爱因斯坦、栗弗西兹等人

1965年，Penrose证明了第一个奇异性定理，回答了这个问题。

奇异性定理

- 经典解中的奇异性
- 引力坍缩中的奇异性
- 奇异性定理
- 关于奇异性的进一步讨论

Penrose奇异性定理1965

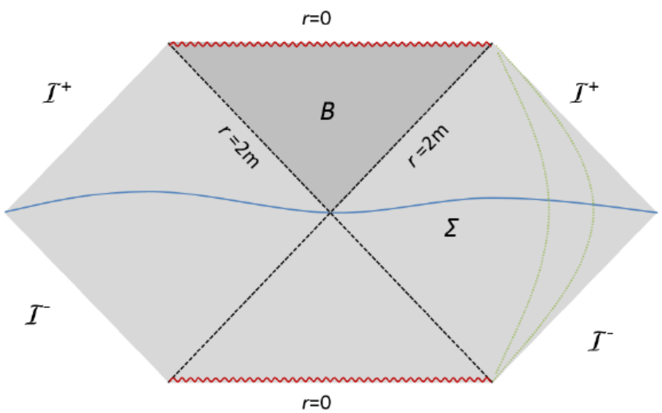
1965年彭罗斯给出了第一个奇异性定理。
这一工作是里程碑式的。

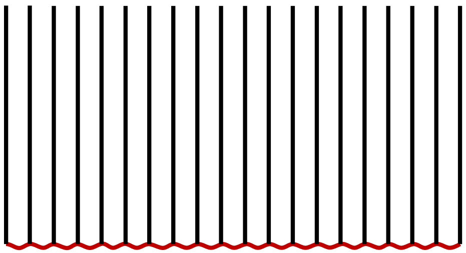
在证明奇异性定理的过程中，彭罗斯引入了现代广义相对论研究中的三个重要概念：

时空的奇异性、俘获面、柯西面和时空的整体双曲性。

R. Penrose, *Gravitational Collapse and Space-Time Singularities*, Phys. Rev. Lett. **14**, 1965

时空的奇异性的定义





类时测地线不完备。

彭罗斯创造性地将时空存在奇异性定义为时空的测地不完备，并成为至今为止人们关于时空奇异性讨论中最广泛采用的定义。

1930年代，Hopf和Renow证明

(有限维)黎曼流形的测地完备和度量完备是等价的，即所谓的Hopf-Renow定理。

时空是一个洛伦兹流形，只有测地完备，而不存在度量完备的概念。

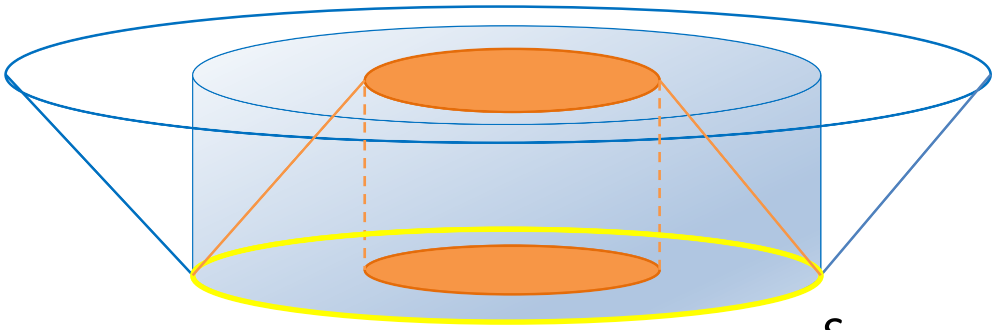
但正如彭罗斯所指出的：

这样的定义和时空的曲率奇异并没有必然的联系。测地不完备并不意味着曲率奇异，如Taub-NUT时空测地不完备，但无曲率发散。

俘获面

奇点出现的区域通常引力场比较强。但怎样有效地描述引力场的强弱？

彭罗斯提出了俘获面的概念



俘获面的形成条件和俘获面如何形成是引力坍缩理论中最为重要的问题。

Schoen和丘成桐在1983年的工作表明：若足够的大质量被放到充分小的区域，俘获面必然形成。

R. Schoen and S.T. Yau , The Existence of a Black Hole Due to Condensation of Matter, Commun. Math. Phys 90, 575-579 (1983)

柯西面和时空的整体双曲性

1952年，Leray在波方程系统中提出的整体双曲的概念。

1953年，Choquet-Bruhat研究了爱因斯坦场方程解的局部存在性和唯一性的问题，给出了解的局部存在性定理。

60年代末，Choquet-Bruhat和Geroch又研究了爱因斯坦场方程解的整体性质，并证明:对于光滑的初始数据存在唯一的最大柯西发展。

整体双曲时空存在柯西面，具有很好的因果性，正是局部物理理论所需要的。

彭罗斯首次将柯西面和整体双曲这些现代概念应用到关于时空奇异性的研究中。

Penrose奇异性定理1965:

如果时空包含一个非紧的柯西面和一个闭合的未来俘获面，且物质场满足强能量条件，则时空中存在未来不完备的类光测地线。

若初始数据非常不平坦，即具有俘获面，且物质场满足合理的条件，则爱因斯坦方程意味着时空必然具有奇异性。

很显然，按照此定理，广义相对论中奇异性的存在和对称性和物质具体形态没有关系。

霍金将彭罗斯的证明应用到宇宙学，并证明了大爆炸奇点的普遍存在性。

Hawking奇异性定理1966:

设 (M, g_{ab})是一个满足$R_{ab}t^a t^b \geq 0$的整体双曲时空，其中t^a是任意一个类时切矢量场（若考虑爱因斯坦引力理论，这等价于要求强能量条件被满足）。设该时空存在一个光滑的(至少C^2)类空柯西面Σ，若其外曲率的迹K在Σ上处处满足$K \leq C < 0$，其中C是一个常数。则从Σ出发的过去指向的类时曲线的长度不大于$3/|C|$。 特别的，所有过去指向的类时测地线都是不完备的。

彭罗斯、霍金的奇异性定理都用到了整体双曲条件。

Penrose和Hawking奇异性定理1970:

到了1970年，彭罗斯和霍金合作，将奇异性定理1965中的时空的整体双曲条件放松，而只要求时空不包含闭合类时线，但需要引入一种较强的一般能量条件(generic energy condition）

$$t_{[a}R_{b]cd[e}t_{f]}t^c t^d \neq 0 \,,$$

其中t^a是类时或类光曲线的切矢，最终给出了著名的霍金-彭罗斯奇异性定理。

具体参考：

S. Hawking, G. Ellis, *The Large-Scale Structure of Space-time*, Cambridge University Press, Cambridge, 1973

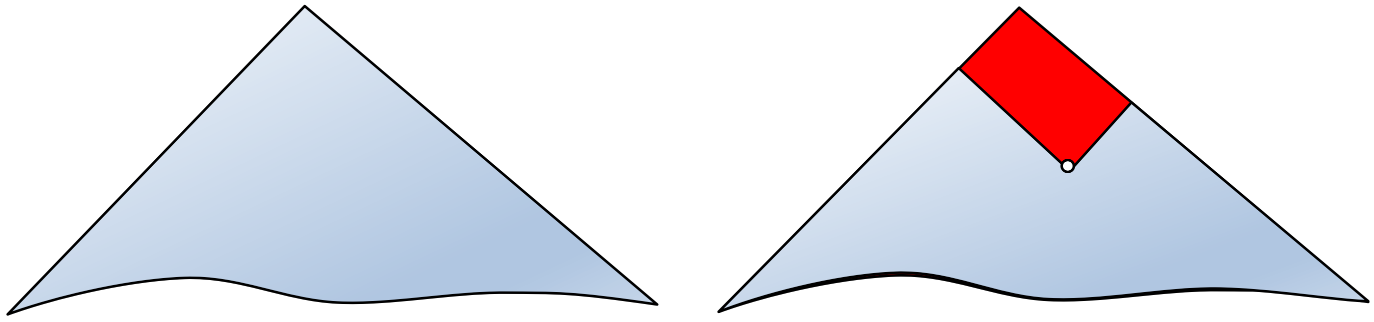
总而言之：在广义相对论的框架下，奇异性是普遍存在的。

弱宇宙监督假设

- 通常描述
- 现代表述
- 引力坍缩中的弱宇宙监督
- 相关验证

奇异性存在产生的问题

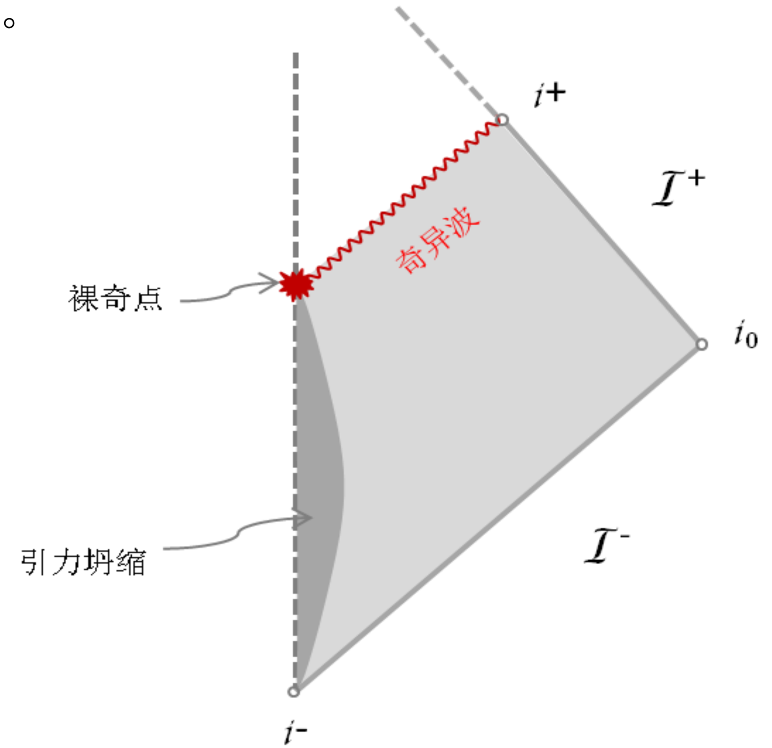
1、可预测性可观地丧失



2、1969年彭罗斯指出：奇点的存在会对其附近的物理产生很大的影响，如克尔-纽曼解型的裸奇点($m^2 < a^2 + e^2$)，和宇宙大爆炸奇点附近大量的物质产生。

3、Penrose的thunderbolt

更让人感到不安的是彭罗斯1978年提出的所谓thunderbolt, 中文翻译是雷电或晴天霹雳。



这是引力坍缩区域产生的奇异波(wave of singularity)，即一种带有曲率奇异的平面型波。这种奇异波的潮汐效应会摧毁整个世界。

弱宇宙监督假设

- 通常描述
- 现代表述
- 引力坍缩中的弱宇宙监督
- 相关验证

通常描述

1968年到1969年，彭罗斯提出了一个宇宙监督假设(现在被称为弱宇宙监督假设)以避免奇点对遥远观测者的任何影响：

奇点总是隐藏在黑洞事件视界之后。

或者

任何一个遥远的观测者都不会遇到奇点，也不会接收到由奇点传播出的任何有害信息。

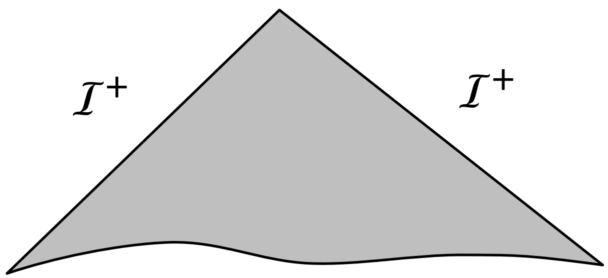
这对爱因斯坦场方程的解提出了要求。遥远的观测者处于远离引力坍缩的时空的渐近区域，因此，更确切地说，这实质上对爱因斯坦方程解的渐近行为提出了要求。

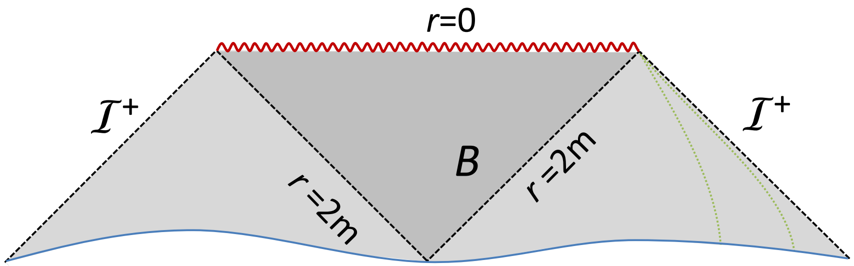
也就是说：时空的渐近区域不存在奇点。

R. Penrose，*Gravitational Collapse: The Role of General Relativity*, Rivista del Nuovo Cimento, Numero Speziale I, 257(1969)

考虑宇宙常数为零的情况，并假定由某个初始数据发展而来的时空(M,g)存在共形完备。该时空的未来类光无限远通常记为$\mathcal{I}^+$。

这样，所有遥远观测者的诉求可归结为：时空在未来类光无限远$\mathcal{I}^+$处渐近平坦，且$\mathcal{I}^+$作为一个3维的流形自身是完备的。完备意味着$\mathcal{I}^+$上每一条测地线都具有(绝对值)任意大的仿射参数，不会出现前面Thunderbolt图中的情况。





这也意味着每个遥远观测者的世界线都可以无限延伸，不会因遇到奇点而终结，只要其寿命足够长。换句话说，对于任意一个遥远的观测者，终其一生都不会遇到奇点。这就是要求$\mathcal{I}^+$完备的意义所在。

对于这样的渐近平坦时空，黑洞可定义为

$$B = M - I^{-}(\mathcal{I}^{+}),$$

而黑洞未来事件视界就是黑洞区B的边界。

很明显：遥远观测者不受奇点的影响表明奇点不属于$\mathcal{I}^{+}$的过去，从而奇点被隐藏在黑洞事件视界之内。

形象地说：奇点穿上了一件称为“黑洞事件视界”的衣服。因不再裸露，遥远的观测者观测不到奇点，当然也不受奇点的影响。

一言以蔽之：弱宇宙监督假设期望任何遥远的观测者终其一生不会受到奇点的影响。

施瓦西黑洞或更广泛的科尔-纽曼黑洞时空中的奇点都属于这种情况，满足弱宇宙监督假设。如施瓦西时空中的奇点($r = 0$)被隐藏在$r = 2m$的黑洞事件视界之内。

但在一般情况下，给定初始数据之后，爱因斯坦方程并不担保演化出来的时空具有上述良好的渐近行为。这由初始数据和物质内容决定。这样，人们提出了弱宇宙监督假设的现代表述。

弱宇宙监督假设

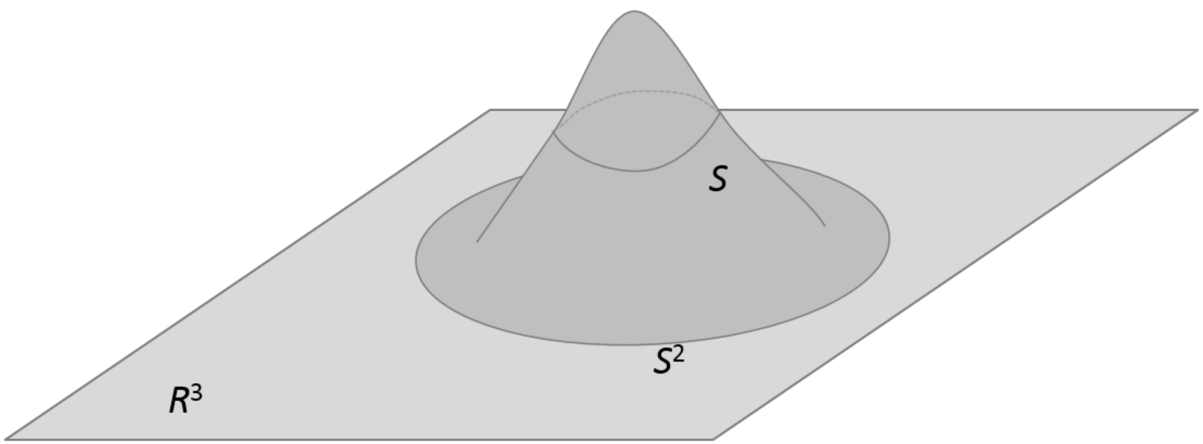
- 通常描述
- 现代表述
- 引力坍缩中的弱宇宙监督
- 相关验证

弱宇宙监督假设（Wald 1997）：

设Σ是一个拓扑为$R^3\#S$的3维流形，假设(h_{ab}, K_{ab}, ψ)是Σ上爱因斯坦方程的非奇异渐近平坦初始数据(其中ψ是合适物质场的初始数据)，那么，一般来说，这些数据的最大柯西发展是一个在未来类光无限远$\mathcal{I}^+$处渐近平坦的时空，且$\mathcal{I}^+$是完备的。

R.M. Wald, *Gravitational Collapse and Cosmic Censorship*, 1997

注1：其中$R^3\#S$表示R^3和S的连通和，其中S是一个紧致流形。$R^3\backslash B_3$对应于Σ上渐近平坦的区域，而$S\backslash B_3$所在的区域对应于Σ上远离平坦的区域。这里B_3是边界为二维球面S^2的三维球体。



注2：弱宇宙监督假设的上述形式中有两个含糊的地方：

(a)合适的物质场;
(b)一般来说。

这两点会在引力坍缩的研究结果中体现出来。这些含糊使得宇宙监督假设很难得到证明，并成为经典引力理论中一个至今仍未解决的难题。

弱宇宙监督假设

- 通常描述
- 现代表述
- 引力坍缩中的弱宇宙监督
- 相关验证

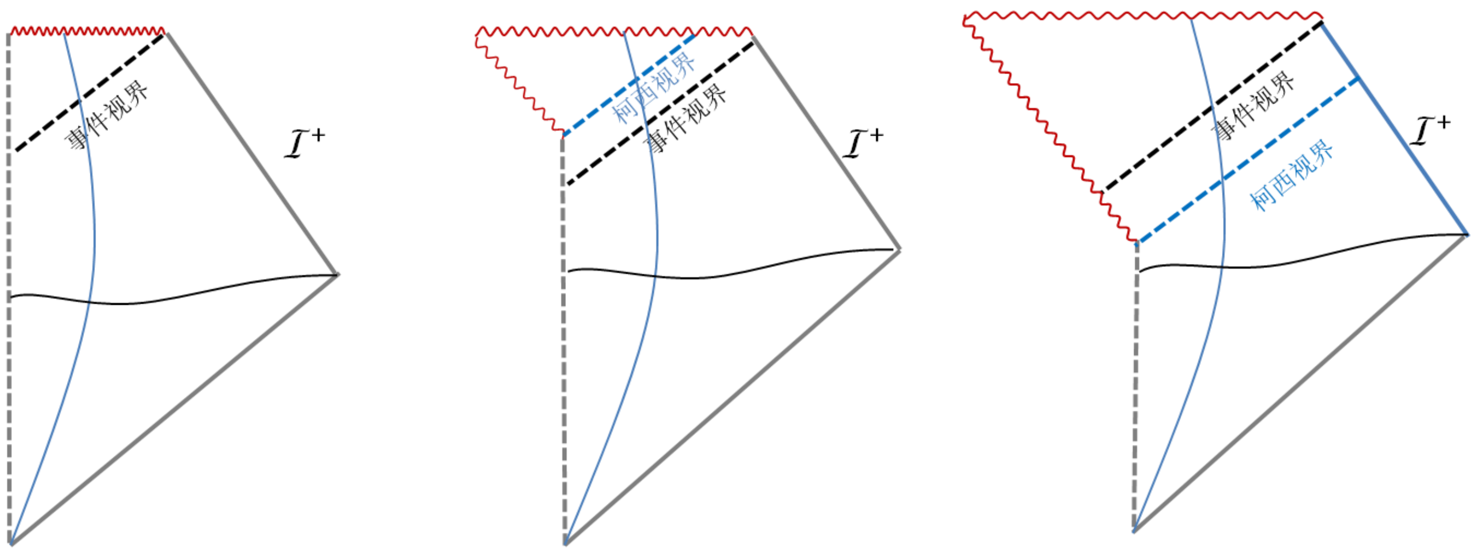
若用引力坍缩验证宇宙监督假设，我们可将问题简单地理解为：

星体最终的归宿是黑洞？还是裸奇点？

描述星体的物质，理想流体似乎是最为自然的。

事实上，最早的引力坍缩模型，即奥本海默和斯奈德的球对称坍缩模型就是基于最为简单的理想流体---尘埃物质。而且在这个模型中尘埃的分布是均匀的。

很显然这个模型中奇点隐藏在事件视界之后，星体坍缩成黑洞，满足弱宇宙监督假设。如下图(a).



(a) (b) (c)

直到七十年代，奥本海默和斯奈德的模型才被进一步推广到非均匀尘埃模型。

1973年Yodzis, Seifert, Muller zum Hagen的研究表明：两个坍缩的尘埃壳在相交点会产生裸奇异，曲率发散，这就是所谓的shell-crossing奇异

后来的研究表明: 这种shell-crossing奇异并非真正意义上的奇异性。当接近真正的奇点，物质系统的物理半径坍缩到零，但shell-crossing奇异对应的物理半径并不为零。这种奇异性被后人称为弱奇异性，且有迹象表明它并不能阻碍时空的进一步作连续(C^0)延拓。

在牛顿引力或狭义相对论的框架下也可以产生这种奇异。换句话说，在没有引力参与的情况下，这种奇异性也会发生。因此，从这个意义上来说，shell-crossing奇异和广义相对论中的引力坍缩没有关系。

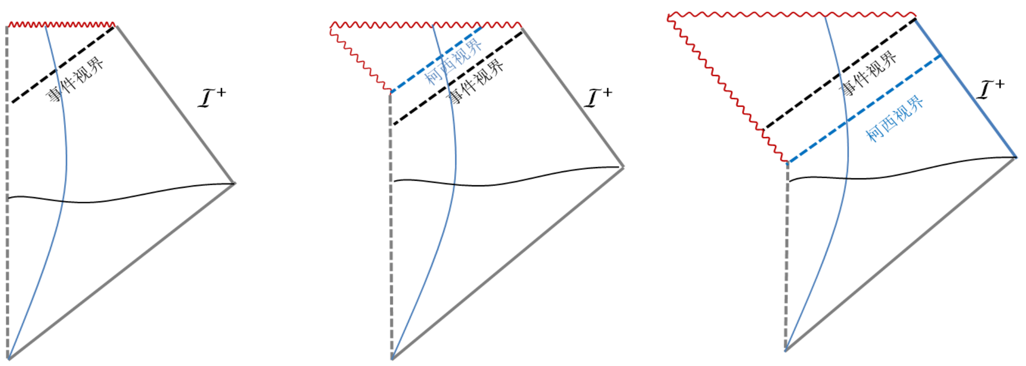
P. Yodzis, H.-J Seifert and H. Muller zum Hagen (1973) Commun. Math. Phys. 34,135; (1974) Commun. Math. Phys. 37 29.

但另外一种裸奇异却不能简单地忽视，这就是shell-focusing奇异。

因为这时候尘埃的密度不均匀，可以想象这种情况：

星体内部先坍缩形成俘获面，但星体表面还没有进入施瓦西视界，但按照彭罗斯的奇异性定理，奇点的形成可能会先于事件视界。研究表明：非均匀尘埃最终可坍缩成裸奇点，见下图（c）。

初始曲面上数据能够演化出的时空具有柯西视界，且相应的$\mathcal{I}^+$不完备。弱宇宙监督假设并不成立。



(a) (b) (c)

D.M.Eardley and L.Smarr, Phys. Rev. D19, 2239, 1979.

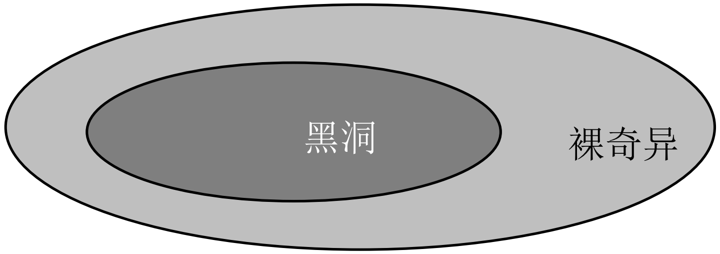
当然这里的初始数据的选取显得重要。

现想象所有可能的初始数据可以看成一个集合，并可在其上赋予一个测度。如果所有形成裸奇点的初始数据在该集合上测度为零，我们便可以说这些初始数据是特别的，并不是一般的情况。

但非均匀尘埃模型的研究表明：所有形成裸奇点的初始数据和形成黑洞情况的测度都不为零，因此和形成黑洞一样，形成裸奇点也具有一般性。事实上，若假定某个初始曲面上密度的分布情况如下

$$\rho(r) = \rho_0 + \frac{1}{2}\rho'' r^2 + \frac{1}{6}\rho''' r^3 + \cdots$$

其中ρ_0是初始曲面上$r = 0$处的尘埃密度， ρ''和ρ'''是密度在$r = 0$处的二次和三次导数。可以证明 $\rho'' < 0$ 时，该数据产生裸奇异。显然 $\rho'' < 0$的数据对应的测度不为零。



形成裸奇异的初始数据对应的测度不为零。

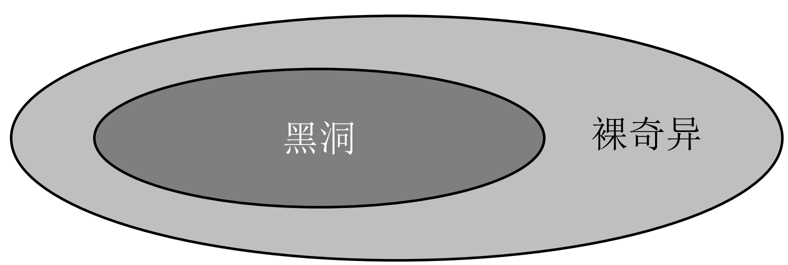
T.P. Singh, *Gravitational Collapse and Cosmic Censorship*, in Classical and Quantum Aspects of Gravitation and Cosmology. Edited by G. Date and B.R. Iyer. 1996.

尘埃模型只是理想流体的一种特殊情况。

真正的星体不可能是简单的尘埃物质。当包含压强时，情况变得复杂。

但无论是解析还是数值的研究都表明，引力坍缩最后可以形成黑洞，也可以形成裸奇点。裸奇点的初始数据对应的测度并不为零，具有一般性。

若考虑非理想流体的情况，如辐射物质，情况也没有改观。在这种情况下我们有球对称引力坍缩模型的解析解，即Vaidya解。同样，坍缩成黑洞或裸奇点的可能性几乎一样。



这些研究表明：

理想流体和辐射物质似乎不是弱宇宙监督假设中“合适”的物质假设，且不能够在“一般情况下”得到具有完备类光无限远的(渐近平坦的)柯西发展。裸奇点的形成具有“一般性”，而不是对初始数据的特别选取造成的。

当然，这似乎意味着：对于理想流体来说，弱宇宙监督假设在球对称引力坍缩模型中不成立。

但问题并非这么简单。后来人们对这些裸奇点的性质进行了研究。

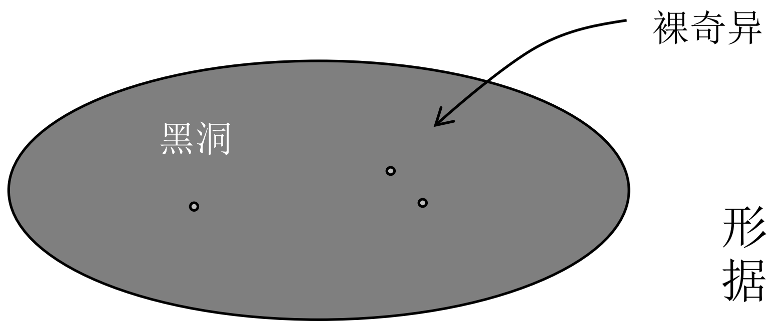
例如：1986年，Newman认为尘埃模型中产生的裸奇异都是弱的，且不会产生真正的裸奇异。但对于辐射物质的Vaidya模型这种假定显然不合适。

例如：1992年，Lake认为裸奇异对应的“质量”为零，而真正的黑洞奇点是有“质量”的。没有质量意味着和真正的引力坍缩没有关系。

这些研究试图从奇点的性质上排除掉那些在一般初值下产生的裸奇点，进而说明弱宇宙监督的成立。

80-90年代，人们将目光投向无质量标量场的引力坍缩。和理想流体的情况不同，在没有引力的情况下，标量场不会产生奇异性。

Christodoulou和Choptuik的研究表明：在一些特殊的初始数据下，存在裸奇异。但所有这些初始数据对应的测度为零。因此对这些初始数据稍作改动，裸奇异便会被视界包裹，且形成黑洞。至少在球对称坍缩的情况下，这一研究是对弱宇宙监督假设的支持。



形成裸奇异的初始数据对应的测度为零。

D. Christodoulou, Commun. Math. Phys. 105 337, 106 587(1986); 109 591,109 613(1987).
D. Christodoulou, Commun. Pure Appl. Math. XLIV 339 (1991); XLVI 1131; (1994) Ann. Math. 140 607(1993).
M. W. Choptuik, in Deterministic Chaos in General Relativity, Eds. D. Hobill, A. Burd and A. Coley (Plenum, New York) (1994).
M. W. Choptuik, Phys. Rev. Lett. 70 9 (1993).

但正如彭罗斯所述：

由于球对称的假设，所有这些例子都是极端特殊的。很难看出这些例子对于宇宙监督假设的一般问题有大的帮助。

R. Penrose, *The Question of Cosmic Censorship*, J. Astrophys. Astr. (1999) 20, 233–248

受到1965年林家翘和徐遐生等人关于牛顿椭球体坍缩的启示，1972年索恩研究了无限长柱体的引力坍缩问题，并证明：在没有事件视界形成的情况下曲率奇异存在。由此，他提出了一个假设，即所谓的箍假设(hoop congecture)

箍假设：

黑洞视界形成当且仅当一个质量M被限制到一个区域，这个区域在每个“方向”的周长C都满足$C \leq 4\pi\ M$。

很显然，按照箍假设，对于一些质量分布，若引力坍缩只在某一部分空间维度上进行，最后必然形成裸奇点。因此箍建设和宇宙监督假设并不是很融洽。

箍假设和球对称坍缩显然也不是很融洽。球对称尘埃坍缩可以形成裸奇点，这也是违背箍假设的。当然，对球对称坍缩，也可能存在箍假设成立(即事件视界存在)且裸奇点存在的情况。

K. S. Thorne, in Magic without Magic: John Archibald Wheeler, Ed. John R. Klauder, (W. H.Freeman and Co., San Francisco) (1972).

1991年，Shapiro和Teukolsky利用数值研究来检验箍假设，并证明箍假设是正确的。

因在数值研究中无法确定事件视界，他们通过寻找表观视界(粗略地说，俘获区的边界)来确定曲率奇异性是否是裸奇异。在广义相对论中，表观视界存在意味着其外部存在事件视界，但表观视界不存在并不意味着事件视界也不存在。表观视界的存在依赖于人们对时空的分层，因此Shapiro和Teukolsky关于表观视界不存在意味着裸奇异的想法并不正确。

这一点，在同年Wald和Iyer随后的工作中被澄清。

另外，箍假设并没有数学上严格的定义。正如Wald所指出的：质量M必然要包含引力能量。但引力场的能量一般来说是非局域的，因此将一个质量限制在某个区域这种说法是非常含糊的。从某种意义上来说，这个质量只能在准局域的意义下来理解。但广义相对论中的准局域能量非常不唯一，没有理由选取某一个作为该假设中的质量。

弱宇宙监督假设

- 通常描述
- 现代表述
- 引力坍缩中的弱宇宙监督
- 相关验证

黑洞稳定性和弱宇宙监督

若黑洞事件视界在微扰下不稳定，则裸奇异可能出现。因此关于黑洞稳定性的研究可以从另一个侧面检验弱宇宙监督假设。

1957年，Regge和Wheeler研究了施瓦西黑洞的线性稳定性。

1970s年，Zerrili随后给出了偶宇称微扰的主方程。

1970年，Vishveshwara最先利用数值方法研究施瓦西黑洞的线性稳定性问题(这也是关于黑洞拟正规模研究的开始)，并证明施瓦西黑洞在奇宇称微扰下是稳定的。

1972年，Price给出了各种微扰的具体衰减规律。

1989年，Whiting证明克尔黑洞不存在不稳定模式。

后续的一系列研究表明：在线性微扰下，大部分黑洞都是稳定的。因此裸奇点不会因为线性微扰而出现。

值得指出的是：1987年Kay和Wald证明了施瓦西时空上线性波方程解的有界定理。

> Kay-Wald定理：假定 ψ 是施瓦西时空上波方程 $\Box_g\psi=0$ 的一个解，且生成这个解的初始数据在初始柯西面上充分规则，那么在黑洞外部区域和黑洞事件视界上
>
> $$|\psi|\leq C\sqrt{D}\,,$$
>
> 其中D是由初始数据决定的一个常数。

这是关于施瓦西黑洞微扰方面最为全面的一个研究结果。

B S Kay and R M Wald, Class. Quantum Grav. 4 893, 1987.

M. Dafermos, G. Holzegel, I. Rodnianski, The linear stability of the Schwarzschild solution to gravitational perturbations,

极端黑洞的稳定性

1974年Wald研究了极端黑洞的另一种稳定性问题。

对于克尔-纽曼黑洞我们有不等式$m^2 \geq a^2 + e^2$。对于极端克尔-纽曼黑洞，我们有$m^2 = a^2 + e^2$, 因此若黑洞能够吞下电荷或角动量非常大的物体使得不等式$m^2 \geq a^2 + e^2$被破坏，则其终态极有可能是一个裸奇点。

但关于克尔-纽曼时空上检验质点运动的研究表明：这种吸收携带过多电荷或角动量物体的过程是不允许的。

但对于带正宇宙常数的情况，1994年，Brill, Horowitz, Kastor, Tanschen等人的研究表明：不同于渐近平坦黑洞，极端的渐近de Sitter黑洞可以吸收类似的物体，因此可以产生裸奇点。

Wald, R. M. 1974, Ann. Phys., 82, 548.
Brill, D. R., Horowitz, G. T., Kastor, D, Traschen, J. 1994, Phys. Rev., D49, 840.

彭罗斯不等式和弱宇宙监督

除了关于克尔-纽曼黑洞中不等式$m^2 \geq a^2 + e^2$被破坏可能性的研究，1971年左右，在引力坍缩的研究中，彭罗斯总结了一个不等式

$$M \geq \sqrt{\frac{A}{16\pi}}\ ,$$

其中M是总质量，而A是黑洞的面积。

可以论证：若这个不等式被破坏，则宇宙监督假设被破坏。

M. Mars, Class. Quant.Grav.26, 193001, 2009

H.L. Bray, P. T. Chusciel, in "The Einstein Equations and the Large Scale Behavior of Gravitational Fields (50 years of the Cauchy problem in general relativity)", H. Friedrich and P.T. Chrusciel, Editors, Birkhaeuser, 2004

小结

弱宇宙监督这个命题的模糊性使得其难以得到证明。人们只在一些特例中给出了它成立或不成立的证据。但不可否认，无论弱宇宙监督假设被证实或证伪对广义相对论理论自身和天体物理的研究都具有重要意义。

在正宇宙常数的情况下，弱宇宙监督假设需要进一步的研究。观测数据表明，我们所在宇宙的宇宙常数是一个正值。这也要求我们对渐近de Sitter的情况进行细致研究。

弱宇宙监督假局限于讨论一个孤立引力系统中奇点对无限远处观测者的影响。关于 $\mathcal{I}^+$ 的讨论使得这个监督假设具有明显的整体性的味道。它只保证无限远处的观测者不受奇点影响，但对于引力坍缩区域的局部观测者没有给出任何保证。例如前面图 (b)。

这促使彭罗斯思考另一个版本的宇宙监督假设，即所谓的强宇宙监督假设。

强宇宙监督假设

- 早期表述
- 现代表述
- 柯西视界的稳定性问题
- 极强宇宙监督假设

强宇宙监督假设

- 早期表述
- 现代表述
- 柯西视界的稳定性问题
- 极强宇宙监督假设

早期表述

1974年彭罗斯提出了强宇宙监督假设，这个宇宙监督假设可以粗略地表述为：

物理的时空是整体双曲的。

1979年，彭罗斯证明：若时空不存在类时奇异则时空是整体双曲。

因此，这个宇宙监督假设也表述为(1978)：

一般来说，类时奇异性不会出现。

R. Penrose. Gravitational collapse. In C. Dewitt-Morette, editor, Gravitational Radiation and Gravitational Collapse, volume 64 of IAU Symposium, Springer, 1974.

R. Penrose, *Singularities of Spacetime*, in Theoretical Principles in Astrophysics and Relativity, edited by N.R. Lebovitz, W. H. Reid, P.O.Vandervoort, 1978

R. Penrose, *Singularites and time-asymmetry,* in General relativity, and Einstein centenary survey, edited by S.W.Hawking and W. Israel(1979).

但什么是类时奇异？度规在奇点处是没有定义的，因此按照通常的方式我们无法谈论奇点的因果性。

对于强因果时空，彭罗斯1978年给出了一种定义奇点因果性的方法。

利用强因果时空的性质，可将时空点和它的过去编时集对应起来。利用时空上因果集的相关知识可将时空点进行分类，即IP，PIP，TIP，IF，PIF，TIF等等。

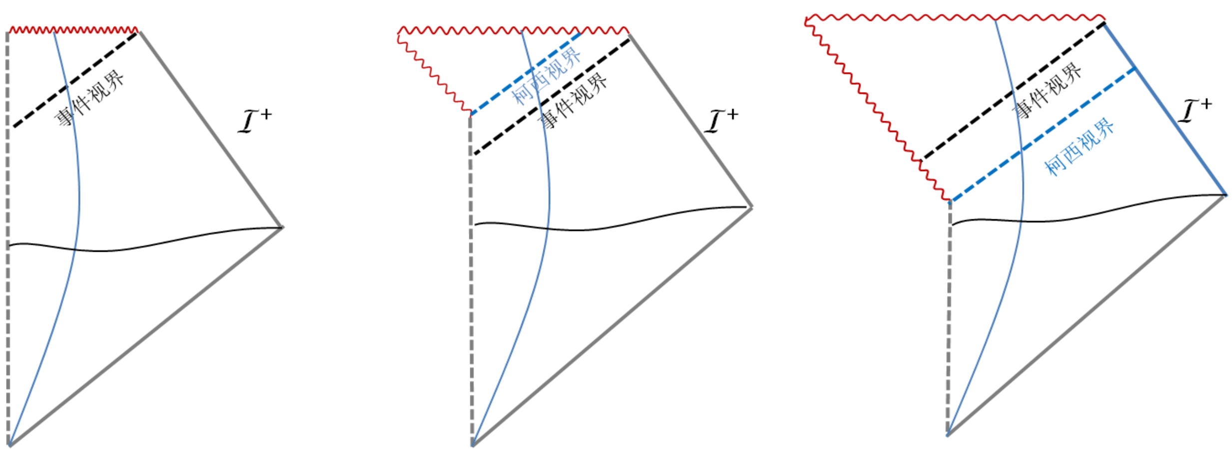
彭罗斯的这套描述可以定义奇点的因果性：类空、类时、类光。

R. Penrose, *Singularities of Spacetime*, in Theoretical Principles in Astrophysics and Relativity, edited by N.R. Lebovitz, W. H. Reid, P.O.Vandervoort, 1978

在彭罗斯的定义中，所谓的类时奇点可以对局部观测者产生影响，因此类时奇点也可以称作是**局部裸奇点**，如前面图(b)。

当然局部裸奇点可以在黑洞事件视界内部，而对遥远观测者没有影响。故有时候人们也将无限远观测者可以看到的奇点为**整体裸奇点**，如图(c)。

按照彭罗斯的分类，宇宙学中的大爆炸奇点是类空奇点，不是任何类型的裸奇点。



(a) (b) (c)

强宇宙监督假设

- 早期表述
- 现代表述
- 柯西视界的稳定性问题
- 极强宇宙监督假设

强宇宙监督假设：

对于渐近平坦或限制在紧致区域的初始数据，一般来说，它具有不可延的最大柯西发展。

D. Christodoulou. The formation of black holes in general relativity. EMS Monographs in Mathematics. European Mathematical Society (EMS), Zurich, 2009

偏微分方程理论和广义相对论：标量场的引力坍缩和宇宙监督假设的现代表述。

1. 这里同样出现了“一般来说”这样的字眼。这说明强宇宙监督假设暂时还没有严格的数学定义。

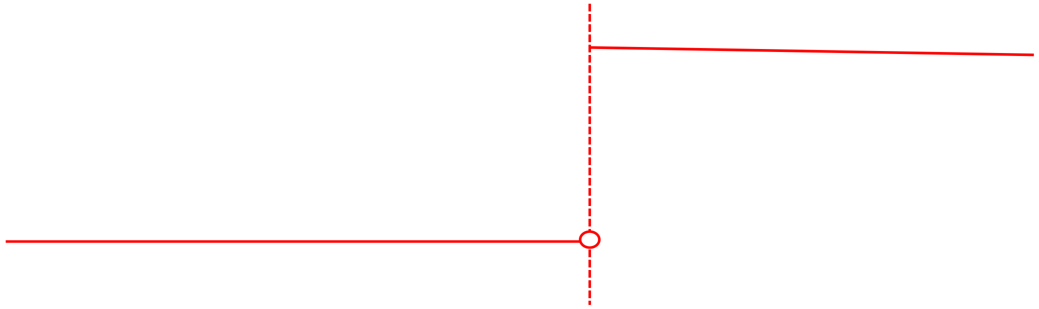
事实上，在其中初始数据使得其对应的最大柯西发展可以很好的延拓为更大的时空。例如在Kerr时空中的某类空曲面上选取其诱导几何为初始数据便可得到可延的最大柯西发展。

2. 这里的“不可延”是在什么程度上不可延？这是强宇宙监督假设中的一个核心问题。

A. Christodoulou的C^0-型不可延

若是C^0不可延，即没有度规的连续延拓，则称为Christodoulou的C^0-型强宇宙监督假设。这种C^0不可延拓由Christodoulou在1999年提出。

这一要求继承了施瓦西时空不能向奇点外进行连续延拓的事实。



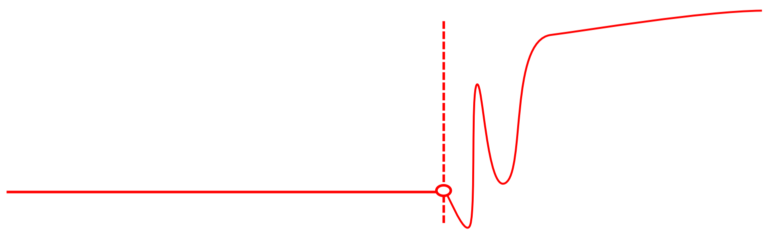
上面度规不连续，是允许的。但这用情况不能称为是延拓。

D. Christodoulou, *Class. Quantum Grav.* **16** A23, 1999

B. Christodoulou--Chrusciel的弱解不可延

若考虑偏微分方程的弱解存在性问题。

爱因斯坦方程存在弱解，则需要克氏符为(局部)平方可积。如果在最大柯西发展的边界，度规给出的克氏符不满足平方可积，则弱解不存在。该最大柯西发展无法以弱解的形式进一步延拓。无法进行弱解意义下的进一步延拓，这就是所谓的Christodoulou-Chrusciel型的强宇宙监督假设。



允许的延拓(示意图)

很显然，度规连续和克氏符的平方可积要求使得这个版本的强宇宙监督假设被破坏的可能性减小了。

P.T. Chrusciel, On uniqueness in the large of solutions of Einstein equations(“Strong Cosmic Censorship”), Cont. Math. 132 (1992), 235–273.

D. Christodoulou. The formation of black holes in general relativity. EMS Monographs in Mathematics. European Mathematical Society (EMS), Zurich, 2009.

弱解在物理上具有明确的意义，如冲击波解。

尽管具备不那么光滑(不是二阶可微)，但这些解的物理意义是明确的。在广义相对论中，这种不具备引力场方程所需的可微性而又具有明确意义的解是普遍存在的。

最典型的例子就是引力波的波前。在数学上，这对应于偏微分方程的弱间断点。

因此在弱解的意义下不可延，从某种意义上来说是期望这种类型物理事件也是能够由初始数据完全确定。

类似于微分方程中的弱解，在广义相对论中，爱因斯坦方程的弱解可作如下定义

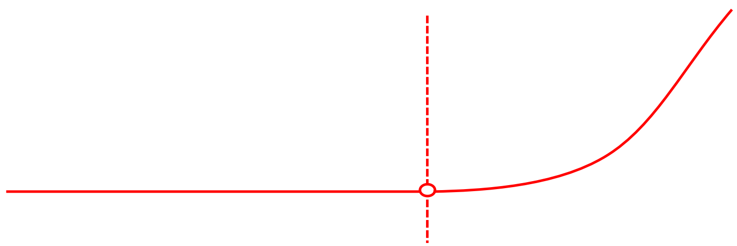
$$\int (G_{ab}-8\pi\, T_{ab}) X^a Y^b = 0,$$

其中 X^a 和 Y^a 是任意具有紧致支撑集的光滑切矢量场，G_{ab} 是爱因斯坦张量，而T_{ab}是物质场的能动张量。在真空的情况下，通过分部积分，可知：弱解存在，则克氏符局部上平方可积。

这样，真空爱因斯坦方程允许可微性不是很好的解。

C. C^2 –不可延

当然，也可以将C^0不可延拓放松到C^2不可延拓，可称为C^2-型强宇宙监督假设。这时候，强宇宙监督假设被破坏的可能性进一步减小。



允许的延拓(示意图)

各种程度的“不可延拓”无非是为了引入某种奇异性，这种奇异性的存在使得物理系统的决定论被保证。

换句话说，通过引入这种奇异性将初始数据无法决定的事件排除在外。当然这些奇异性的强弱和“不可延拓”的程度密切相关。例如：C^0不可延拓对应较强的奇异性，而弱解意义下的不可延拓对应相对较弱的奇异性。

强宇宙监督假设

- 早期表述
- 现代表述
- 柯西视界的稳定性问题
- 极强宇宙监督假设

柯西视界的微扰稳定性

1979年彭罗斯便提出了一般时空柯西视界不稳定的问题。

1999年彭罗斯进一步明确了他的想法：粗略地说，(在微扰下)柯西视界$H^+(\Sigma)$是不稳定的，且会被奇异性所替代。这里Σ可理解成初始数据所在的曲面，而$H^+(\Sigma)$是它的柯西视界，如图。

事实上，彭罗斯的想法基于他和Simpson在1973年的工作： RN黑洞的内视界(柯西视界)的不稳定问题

1978年，McNamara指出：微扰场(如标量场)的梯度在柯西视界处存在发散。

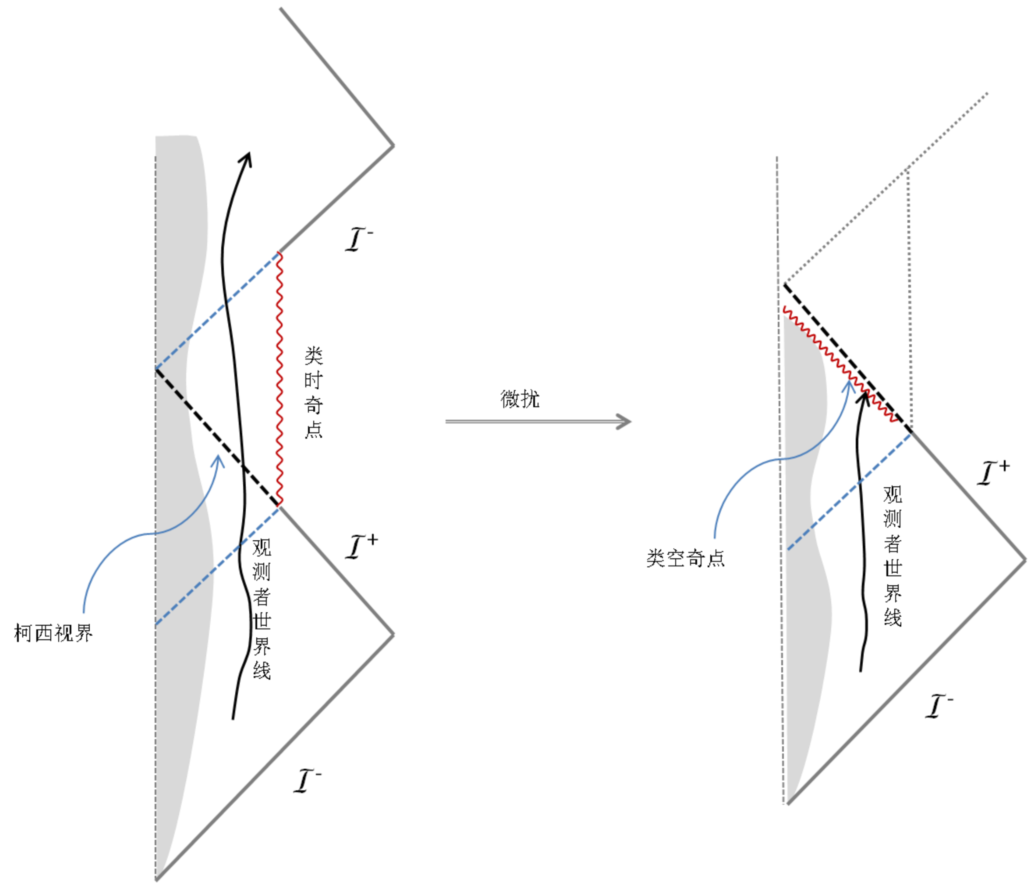
1982年，钱德拉塞卡和Hartle等人的工作进一步给出了柯西视界不稳定的证据。

M.Simpson and R. Penrose, Internal stability in a Reissner-Nordstrom black hole, International Journal of theoretical physics, Vol.7, No.3 (1973)

J. M. McNamara, Proc. R. Soc. Land. A. 358, 499-517 (1978)

J. M. McNamara, Proc. R. Soc. Lond. A. 364, 121-134 (1978)

S. Chandrasekhar and J. B. Hartle， Proc. R. Soc. Lond. A 384, 301-315 (1982)



$\mathcal{I}^-$
类时奇点
$\mathcal{I}^+$
观测者世界线
柯西视界
$\mathcal{I}^-$
微扰
$\mathcal{I}^+$
观测者世界线
类空奇点
$\mathcal{I}^-$

这种不稳定性通常可以理解：

考虑黑洞事件视界外的小微扰，由于蓝移效应，这个微扰会在传播到柯西视界附近时变得非常强，以至于摧毁柯西视界。

这些研究归结为RN或Kerr时空上线性波方程

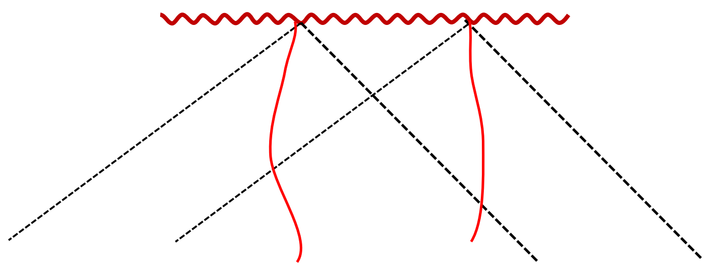
$$\Box_g \psi = 0$$

在柯西视界上的有界性问题。这里$\Box_g$代表(包含了有效势等)波算子。当然初始数据的选取在讨论该方程解的时候也非常重要。

这些研究使得人们普遍认为：微扰会使得柯西视界消失，取而代之的是曲率奇异，强宇宙监督假设被保证。

但微扰后，柯西视界附近会出现什么样的奇异？是类空奇异？还是类光奇异？

70年代，在宇宙学中提出的BKL (Belinskii - Khalatnikov - Lifshitz) 猜想假定所有的奇异性都是类空奇异，并取得了很大的成功。



为此，人们提出了一个**极强宇宙监督假设**(very strong cosmic censorship)，并假定由合适的初始数据演化所得的时空若存在奇异则必然是类空奇异。

V. A. Belinsky, I. M. Khalatnikov and E. M. Lifshitz, Adv. Phys. 19, 525 (1970).

质量暴涨

1990年，Poisson和Israel发现了柯西视界上的**质量暴涨**现象。

Price衰减律：考虑(将要)形成黑洞的星体表面的微扰，则其会产生辐射。这些辐射会和时空曲率作用(类似于Regge-Wheeler方程中的有效势)，一部分被反射回星体坍缩所形成的黑洞，另一部分跑到无限远。反射回辐射的幅度在后期按照负幂律衰减。这就是辐射尾巴(tail)的Price衰减规律。

施瓦西情况下：非球对称微扰在奇点附近被迅速稀释，不会对奇点附近的时空产生任何影响。

RN黑洞的情况：这些辐射尾巴会在蓝移效应下给出一个重要的结果，即时空的霍金质量在柯西视界上发散。这就是所谓的柯西视界上的质量暴涨。

E. Poisson, and W. Israel, Phys. Rev. D. 41.1796, 1990.

霍金质量的几何表达式中包含了关于度规的一阶导数(当然也可将霍金质量表达成物质场(例如标量场)能量密度的某种积分)。

质量暴涨意味着度规一阶导不连续。这说明我们无法将时空再向柯西视界之外做可微的延拓。

在正宇宙常数存在的情况下，Chambers，Moss，Mellor，Brady，Poisson等人的工作表明，RN-de Sitter和Kerr-de Sitter时空柯西视界是稳定的。

因此，当正宇宙常数存在时，强宇宙监督假设可能是不成立的。

但这些研究都是在线性微扰的意义下进行的。这意味着在正宇宙常数存在的情况下，经典物理的可预测性是否适用还是一个暂时无法回答的问题。

C. M. Chambers, The Cauchy Horizon In Black Hole-de Sitter Spacetimes, Internal structure of black holes and space-time singularities: proceedings of workshop, Haifa, Israel, 29 Jun - 3 Jul 1997, Lior M. Burko (ed.), Amos Ori

主要内容

- 奇异性定理
- 弱宇宙监督假设(WCC)
- 强宇宙监督假设(SCC)
- 强宇宙监督假设的最新进展
- 总结和讨论

强宇宙监督假设的最新进展

- 渐近平坦的情况
- 正宇宙常数的情况

自1973年提出以来，关于柯西视界稳定性的问题已经有了很长时间的研究历史。对于物理学家来说，这一问题已经是老生常谈。

但对习惯于严格的数学家来说，很多物理上已知的结论大多可被看成是folklore。当然，严格的数学证明的确需要数学家来完成。

这方面的研究包括微扰意义下的线性近似和非微扰的完整的引力场方程的初值问题。

强宇宙监督假设的最新进展

- 渐近平坦的情况
- 正宇宙常数的情况

线性微扰

在RN和Kerr时空的背景上，对于柯西面上合适的一般性的初始数据，线性波方程

$$\Box_g \psi = 0$$

的解ψ在柯西视界上总是有界的。

因此ψ可以连续地延拓到柯西视界之外。这也意味着ψ受到蓝移效应并不足以使其发散。

而ψ沿着横截于柯西视界方向的梯度在柯西视界上是发散的，即蓝移效应对ψ的梯度产生了较大的影响。

这意味着ψ并不属于索伯列夫空间H^1。

因为能量密度和ψ的梯度密切相关，因此在柯西视界上可能存在(霍金)质量暴涨现象。

2017年Dafermos和Luk将ψ的有界性总结成一个定理：

设ψ是非极端RN或Kerr黑洞上线性波方程(1)的一个解。假定生成这个解的初始数据在无限远处(始曲面Σ的无限远处)衰减的足够快，那么：(a) 解ψ在黑洞的外部区域整体有界，且在事件视界上按照负幂率衰减到零。(b)在黑洞内部的类空超曲面上，ψ具有和事件视界上类似的负幂率衰减。(c)解在整个时空上有界，并可以连续地延拓到柯西视界(之外)。

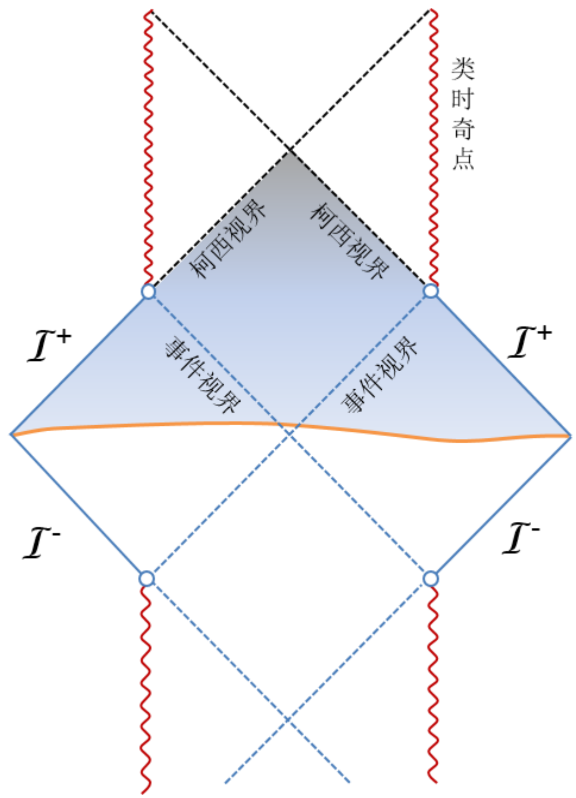
很显然这个定理包含了Kay和Wald的定理，且表明ψ在黑洞内部是有界的。辐射的Price衰减律在这个定理中也得到了刻画。

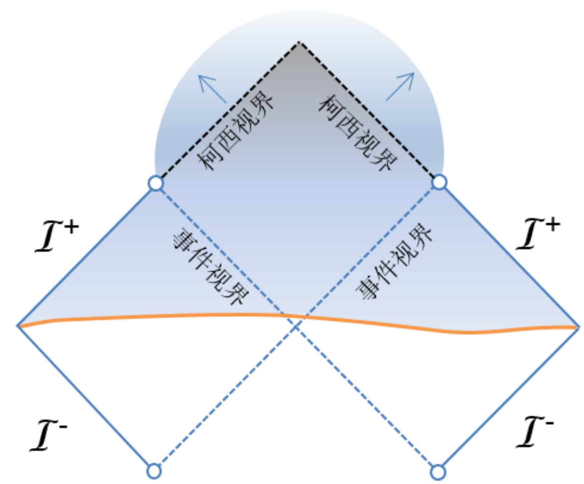
Luk，Oh，和Sbierski证明：ψ的梯度在柯西视界上发散。

M. Dafermos, and J. Luk, The interior of dynamical vacuum black holes I: The C^0-stability of the Kerr Cauchy horizon, arXiv: 1710.01722.

J. Luk and S.-J. Oh. Proof of linear instability of the Reissner-Nordstrom Cauchy horizon under scalar perturbations. Duke Math. J., 166(3):437-493, 2017.
J. Luk and J. Sbierski. Instability results for the wave equation in the interior of Kerr black holes. J. Funct. Anal., 271(7):1948-1995, 2016.
J. Luk and S.-J. Oh. Strong cosmic censorship in spherical symmetry for two-ended asymptotically at initial data I. The interior of the black hole region. arXiv:1702.05715.

总而言之，对于非极端的RN和Kerr黑洞和非常一般性的初始数据，微扰场已在数学上被严格证明是有界的。但其梯度在柯西视界上发散，从而在柯西视界上ψ不属于H^1





柯西视界不稳定，微扰后成为什么样的奇异？

这种奇异性很可能就是所谓的“弱类光奇异”

J. Luk and S.-J. Oh. Strong cosmic censorship in spherical symmetry for two-ended asymptotically at initial data I. The interior of the black hole region. arXiv:1702.05715.

J. Luk and S.-J. Oh. Strong cosmic censorship in spherical symmetry for two-ended asymptotically at initial data II. The exterior of the black hole region. arXiv:1702.05716.

J. Luk, Weak null singularities in general relativity, arXiv:1311.4970.

这些关于线性波方程的研究似乎预示着：

因为场(对应于度规)可连续地延拓到柯西视界之外，故Christodoulou的C^0-型强宇宙监督假设被破坏；

因为场的梯度(对应于克氏符)在柯西视界上发散，这意味着克氏符在柯西视界上不是局部平方可积，故Christodoulou-Chrusciel型的强宇宙监督假设被保持。

线性近似给出了重要的线索。但在非线性的意义下，这种设想是否成立？这需要人们考虑微扰场的反作用，或者整个爱因斯坦场方程。

标量场引力坍缩

考虑完整的引力场方程后，会有很多困难。例如：我们没有一个事先定义好的柯西视界等。图像上和线性微扰会有很大的不同。

2017年Dafermos和Luk证明了一个定理

考虑真空爱因斯坦场方程的合适的初始数据，这些初始数据是(由一个动力学黑洞演化所得的)Kerr黑洞内部一张合适的类空超曲面Σ上的诱导几何(度规和外曲率)，那么由Σ所得的最大柯西发展可以进行双类光分层(foliation)，并具有非平庸的柯西视界。另外，度规可以连续的延拓到柯西视界。

这个定理表明：在真空、无球对称的情况下，C^0-型强宇宙监督假设也被破坏。时空的度规可以向柯西视界之外作连续的延拓。

M. Dafermos, and J. Luk, The interior of dynamical vacuum black holes I: The C^0-stability of the Kerr Cauchy horizon, arXiv: 1710.01722.

强宇宙监督假设的最新进展

- 渐近平坦的情况
- 正宇宙常数的情况

我们的宇宙拥有一个正的宇宙常数，这使得关于正宇宙常数情况下的强宇宙监督假设变得重要。

但当宇宙常数存在时，情况变得复杂了很多。直观上来说，正的宇宙常数从某种意义上来说提供了一种“斥力”，这种斥力使得引力坍缩的奇点不容易形成(对比于宇宙常数为零的情况)。

另外，Price衰减律不再是负幂率的形式，而是变成了指数型衰减。蓝移效应是指数型的，因此蓝移效应和Price衰减形成竞争。这会导致柯西视界处的质量暴涨不一定存在。

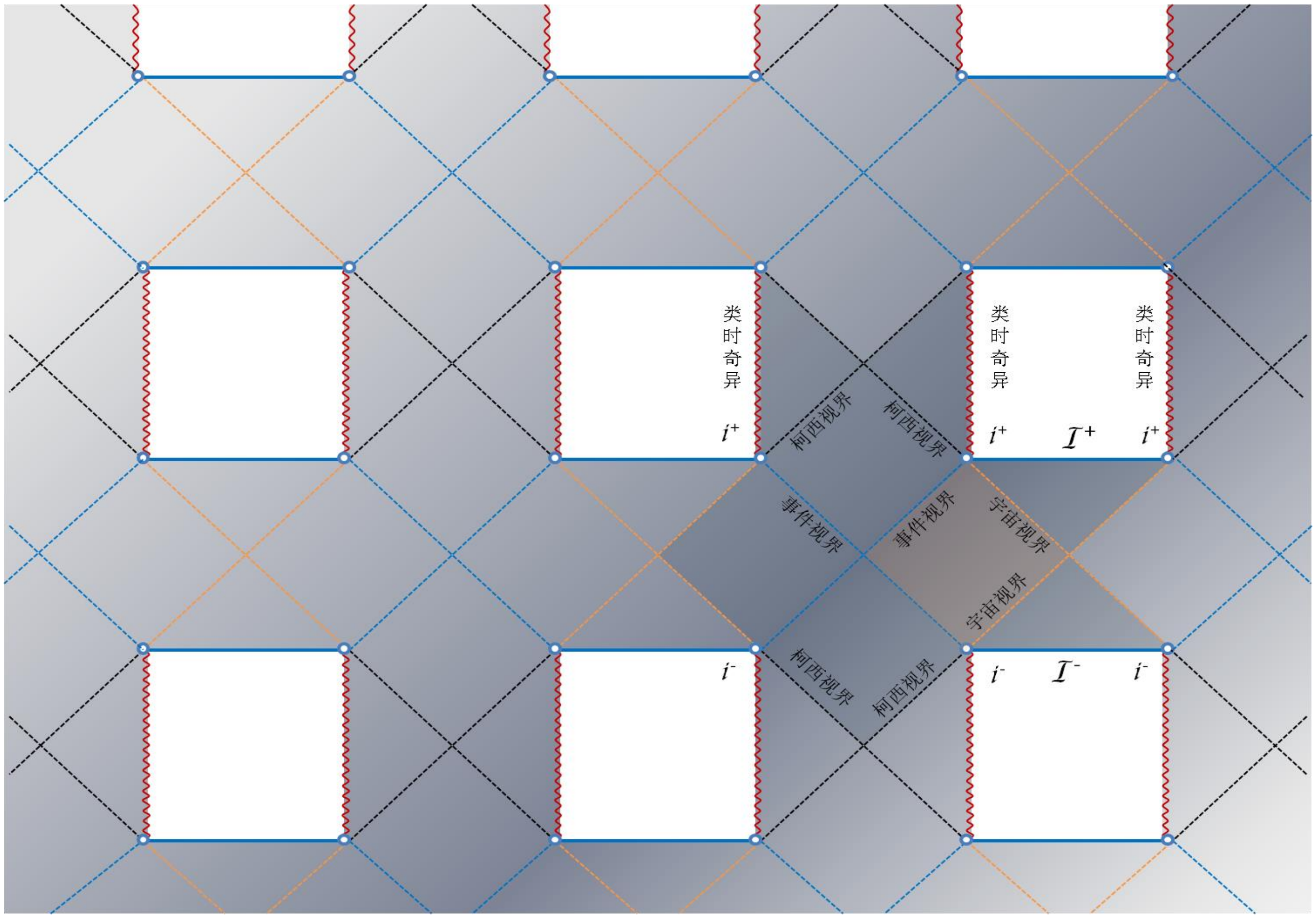
线性微扰

2015年Hinz和Vasy系统地分析了RNdS和Kerr-dS黑洞柯西视界附近的线性波，并证明了一个定理：

对于非极端的RNdS和Kerr-dS黑洞，存在一个只依赖于时空的参数$\alpha > 0$，使得下面结论成立：若ψ是具有光滑初始数据的波方程(1)的解，则存在一个$C > 0$使得ψ具有渐近展开$\psi = \psi_0 + \psi'$，其中ψ_0是一个复数，而ψ'在柯西视界外一致有界，即$|\psi'| \leq Ce^{-\alpha t}$。$\psi'$沿着和柯西视界相切的稳态矢量场的导数也具有类似的有界性(除了C不一样)。进一步地，ψ可以连续地延拓到柯西视界。更为精确地，在$t > 0$，ψ'和它的上述导数都在加权索伯列夫空间$e^{-\alpha t}H^{1/2+\alpha/\kappa-0}$，其中$\kappa$是柯西视界的表面引力。对于有质量的标量场，当其质量很小时，除了$\psi_0 = 0$之外，上述结果都成立。

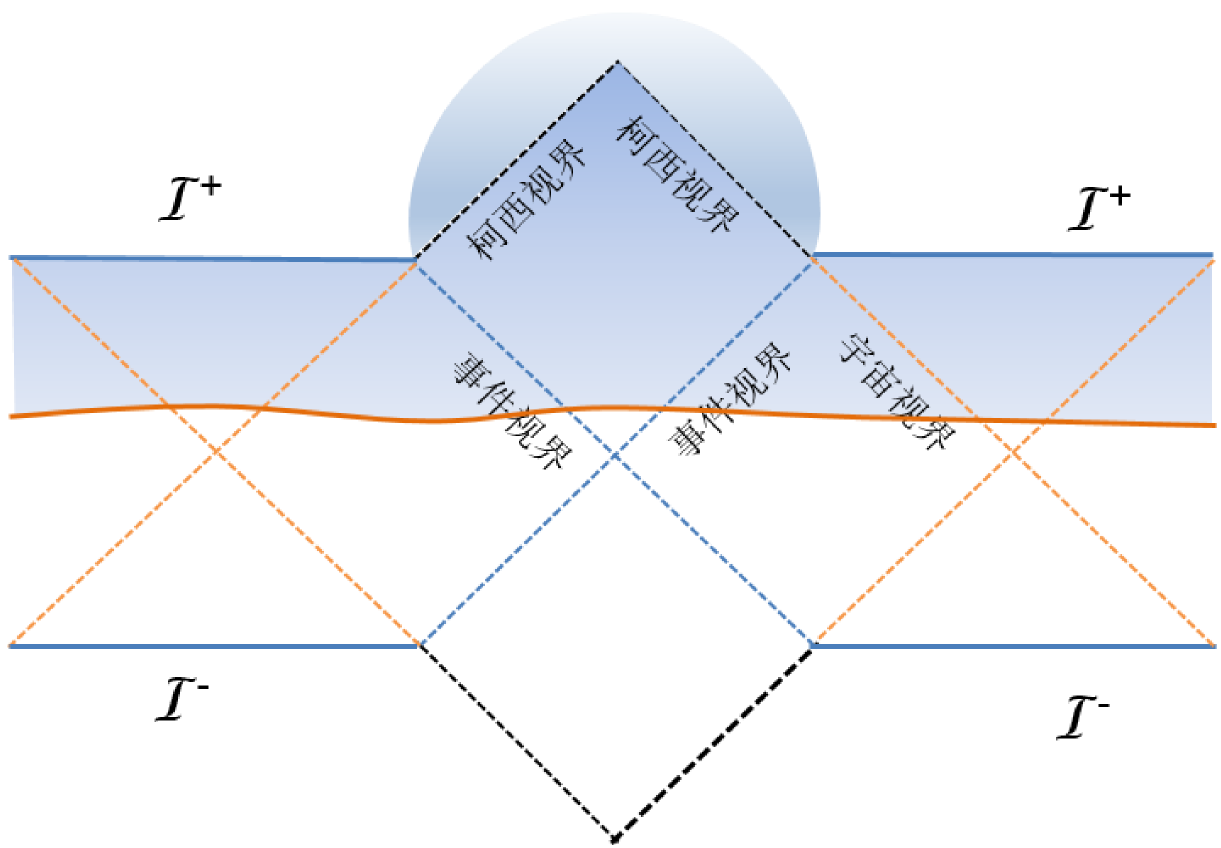
P. Hintz, and A. Vasy, analysis of linear waves near the Cauchy horizon of cosmological black holes. arXiv:1512.08004.

注1：RNdS黑洞比起RN黑洞复杂，多了宇宙视界。



注2： 其中的t在柯西视界和宇宙世界上类似于超前爱丁顿坐标，而在事件视界上类似于推迟爱丁顿坐标。上面的定理表明：在柯西视界上Price衰减律是指数型的。

注3：微扰场可连续地延拓到柯西视界之外，且在柯西视界上有界。



注4：定理意味着：在柯西视界附近，对任意的t，$\psi-\psi_0$在索伯列夫空间

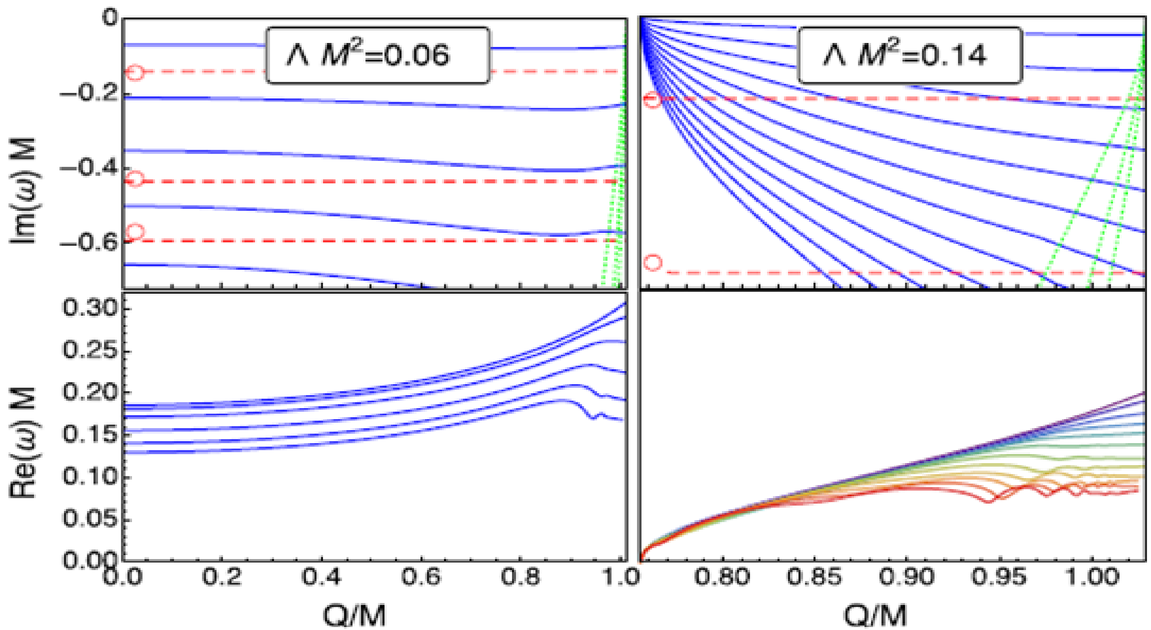
$$H^{1/2+\alpha/\kappa-0}$$

注5：可以论证：α是比波算子$\Box_g$的谱隙(spectral gap) α_0小的任意正实数。这个α_0不是别的，就是拟正规模虚部所成集合的下确界。

注6：若$\beta=\alpha/\kappa>1/2$，则微扰场(对应于度规)在索伯列夫空间H^1中。这和没有宇宙常数的情况显然不一样。这意味着微扰场可足够规则地延拓到柯西视界之外，且其(弱)导数平方可积，故Christodoulou - Chrusciel型的强宇宙监督假设被破坏！在这种情况下，这也意味着带宇宙常数的爱因斯坦场方程在柯西视界处具有弱解意义下的延拓。

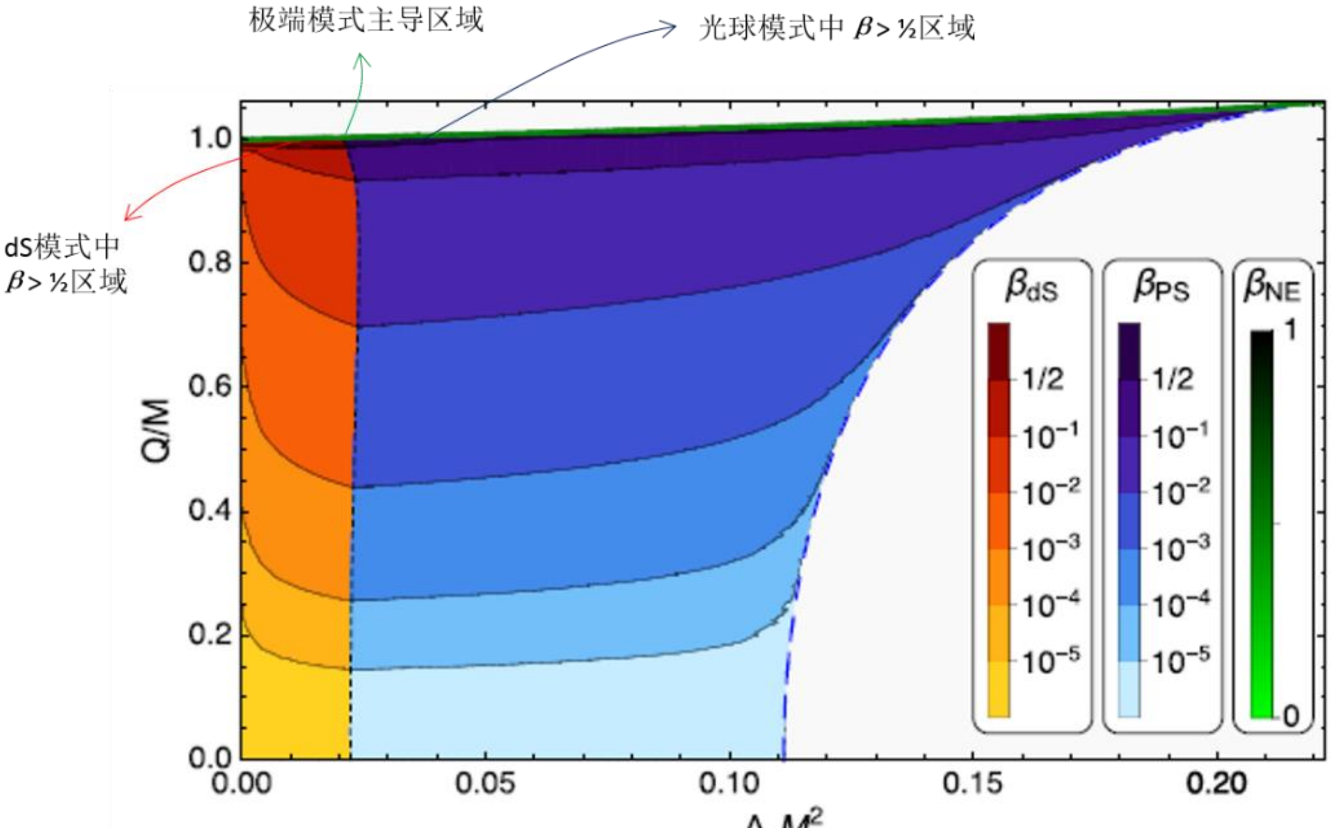
注7：若$\beta=\alpha/\kappa>1$，由索伯列夫嵌入定理可知微扰场可微，即属于C^1。这时候柯西视界上不存在质量暴涨，曲率奇异也不存在。

2018年Cardoso等人仔细研究了RNdS黑洞的拟正规模，发现了三种不同类型的拟正规模：光球模式，dS模式，和近极端模式



Cardoso等人关于RNdS黑洞拟正规模的研究结果。

V. Cardoso, J. L. Costa, K. Destounis, P. Hintz, and A. Jansen, quasinormal modes and strong cosmic censorship, Phys.Rev.Lett.120,031103(2018)



极端模式主导区域
光球模式中 β> ½区域
dS模式中
β> ½区域
1.0
0.8
0.6
0.4
0.2
0.0
Q/M
0.00
0.05
0.10
0.15
0.20
Λ M²
βdS
βPS
βNE
1/2
10⁻¹
10⁻²
10⁻³
10⁻⁴
10⁻⁵
1
0

在近极端的情况下出现了

$$\frac{1}{2} < \beta < 1$$

这意味着微扰场在索伯列夫空间H^1中，度规可能允许向柯西视界外弱解意义下的延拓。但C^1-型的延拓被极端模式的存在阻止。

这也暗示：正的宇宙常数使得Christodoulou-Chrusciel型的强宇宙监督假设被破坏，而C^2-型的强宇宙监督假设仍然被保持。

非线性情况下的讨论

真正的结论只有在考虑了整个引力场方程的初值问题后才能给出。最近Luna等人的研究表明：

即使考虑了非线性理论和完整地爱因斯坦场方程之后，强宇宙监督假设仍然会被破坏。

R. Luna, M. Zilhao, Vitor Cardoso, J. L. Costa, J. Natario, Strong Cosmic Censorship: the nonlinear story, arXiv:1810.00886.

小结

强宇宙监督假设的现代表述中最核心的部分是关于可延拓的界定。

当宇宙常数为零时，Christodoulou的C^0-型强宇宙监督假设已经被证伪。

而人们近期的进一步研究表明：当正宇宙常数存在时，Christodoulou - Chrusciel型的强宇宙监督假设也被证伪。

经典理论的可预言性迎来新的挑战

主要内容

- 奇异性定理
- 弱宇宙监督假设(WCC)
- 强宇宙监督假设(SCC)
- 强宇宙监督假设的最新进展
- 总结和讨论

总结和讨论

弱宇宙监督假设可以表述为：上帝憎恶奇异性。

当正的宇宙常数存在时，弱宇宙监督假设被破坏。

但强宇宙监督假设似乎表明：经典物理的决定论需要合适的奇异性。

当正的宇宙常数存在时，强宇宙监督假设在弱解的意义下被破坏。

正如彭罗斯1999年所指出的：所有这些关于宇宙监督假设的证明仍然是在一些特定的模型下进行。宇宙监督假设的证明仍然是广义相对论研究中没有解决的问题。

谢谢！

$$H^0 = L^2$$

$$\mathcal{D} \subseteq \mathscr{S} \subseteq H^{\infty} \subseteq H^s \subseteq L^2 \subseteq H^{-s} \subseteq H^{-\infty} \subseteq \mathscr{S}' \subseteq \mathcal{D}'$$

$$D_\alpha H^s \subseteq H^{s-|\alpha|}$$