

量子纠缠与虫洞

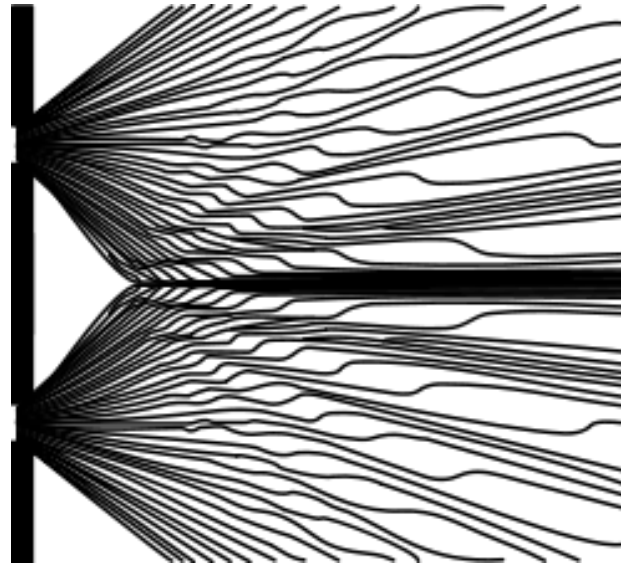
蔡庆宇

中国科学院 精密测量科学与技术创新研
究院

大纲

- 量子纠缠
- 虫洞与时空旅行
- 热态与ER=EPR猜想
- ER=EPR?
- 总结与讨论

德布罗意-玻姆量子轨道理论



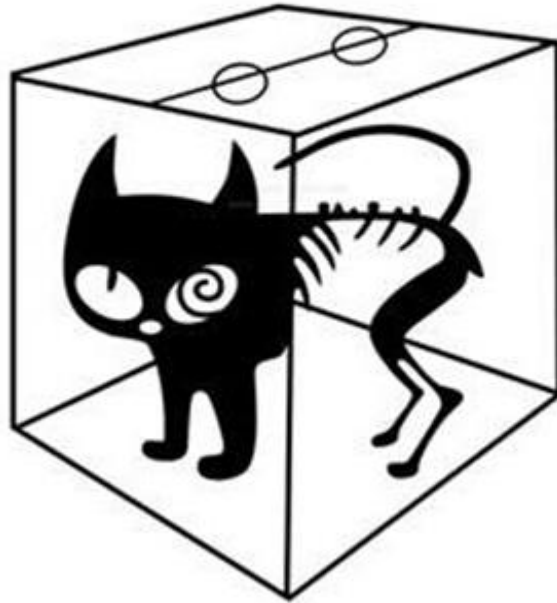
$$\frac{\partial S}{\partial t} + \frac{(\nabla S)^2}{2m} + V + Q = 0$$

P. R. Holland, *The quantum theory of motion*,
(Cambridge university press, 1993), pp.176-190.

薛定谔猫佯谬



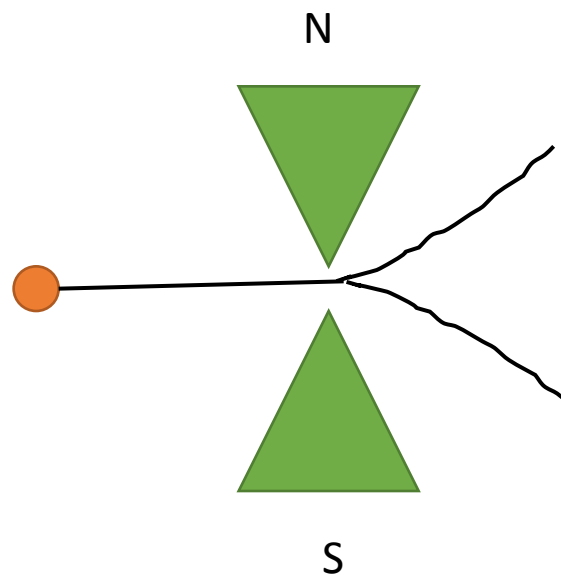
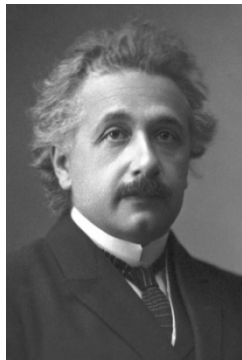
SCHRODINGER'S CAT IS
A · L · E · V · E



薛定谔与他的猫

$$|\psi\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} [|dead\rangle + |alive\rangle]$$

量子力学违背了因果律



爱因斯坦等质疑量子力学完备性

MAY 15, 1935

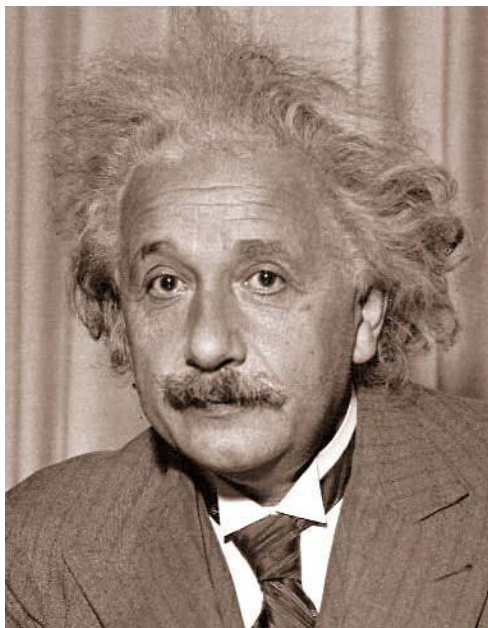
PHYSICAL REVIEW

VOLUME 47

Can Quantum-Mechanical Description of Physical Reality Be Considered Complete?

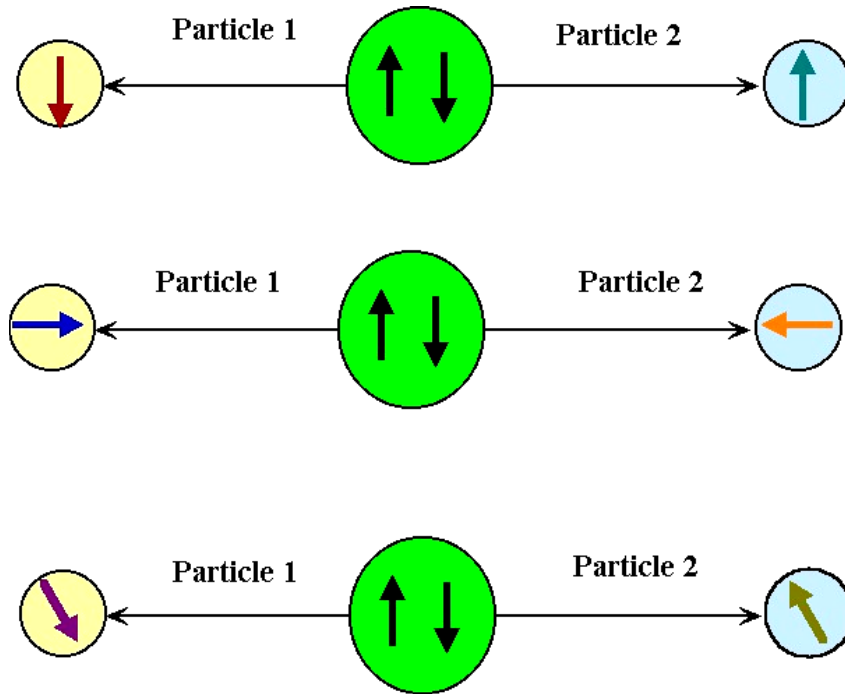
A. EINSTEIN, B. PODOLSKY AND N. ROSEN, *Institute for Advanced Study, Princeton, New Jersey*

(Received March 25, 1935)



EPR paradox

两粒子叠加态—量子纠缠



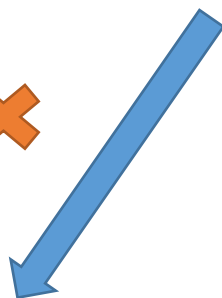
从哲学争论到数学判据：Bell不等式

1964年，数学家Bell给出了一个判断EPR质疑的不等式。

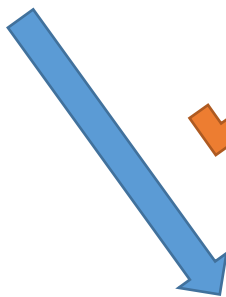


贝尔不等式：

$$|P(a, b) - P(a, c)| \leq 1 + P(b, c)$$



量子力学正确



爱因斯坦正确

从数学判据到实验检验

- 1981年，Alain Aspect 等人的实验结果冲突了Bell不等式。
- 1980年代之后，越来越多的实验结果冲突Bell不等式。

•截止到目前，没有任何一个实验和量子力学的理论预言相冲突！

•由于实验中仍然存在漏洞，争议仍在继续！



量子纠缠

- 波函数Schmidt分解数大于1，则称为纠缠态（不能写成乘积态）

$$|\psi\rangle_{AB} \neq |\psi\rangle_A \otimes |\psi\rangle_B$$

- 两体纯态

$$|\psi\rangle_{AB} = \sum_{ij} c_{ij} |i\rangle_A \otimes |j\rangle_B$$

- 量子多体纠缠：公开难题

大 纲

- 量子纠缠
- 虫洞与时空旅行
- 热态与ER=EPR 猜想
- ER=EPR?
- 总结与讨论

概念

- **虫洞**：（采用Visser的定义^[1; 1995]）

Definition 10 A wormhole is any compact region of spacetime with a topologically simple boundary but a topologically nontrivial interior.

- **时空穿梭/时空旅行**：

1、**星际旅行(interstellar travel)**：强调空间点上的跳跃。

- （1）、1935年Einstein和Rosen提出“Bridge”概念，认为它连接了两个遥远的空间^[2]。
- （2）、1988年Morris和Thorne提出存在exotic matter使得穿行虫洞(traversable wormhole)是可行的^[3]。

2、**时间旅行(time travel)**：强调时间点上的跳跃。

- （1）、1988年Morris、Thorne和Yurtsever结合狭义相对论和可穿行虫洞构造了一个时间机器^[4]。

虫洞

- 1916年奥地利物理学家 Flamm 最先在他的文章《Contributions to Einstein's theory of gravitation》中暗示虫洞的存在^[5]。

$$\frac{dz}{dR} = \operatorname{tg} \chi = \sqrt{\frac{\alpha}{R - \alpha}}$$

$$z^2 = 4\alpha(R - \alpha).$$

- 1921年德国数学家 Weyl 在尝试用电磁场能量分析质量时，提出了空间中可能存在连通不同区域的“一维管道”^[6]。

have nothing to do with the energy of the associated field. Weyl's subsequent analysis of mass in terms of electromagnetic field energy provided a definition of mass and a derivation of the basic equations of mechanics, and led Weyl to the invention of the topological idea of *wormholes* in spacetime. Weyl did not use the term 'wormholes'; it was John Wheeler who later coined the term 'wormhole' in 1957. Weyl spoke of *one-dimensional tubes* instead. "Inside" these tubes no space exists, and their boundaries are, analogous to infinite distance, inaccessible; they do not belong to the field. In a chapter entitled

E-R桥（爱因斯坦-罗森桥） [2]

- 史瓦西解：

$$ds^2 = -\left(1 - \frac{2m}{r}\right)^{-1} dr^2 - r^2(d\theta^2 + \sin^2\theta d\phi^2) + \left(1 - \frac{2m}{r}\right) dt^2$$

做坐标变换： $u^2 = r - 2m$

可得：

$$ds^2 = -4(u^2 + 2m)du^2 - (u^2 + 2m)^2(d\theta^2 + \sin^2\theta d\phi^2) + \left(\frac{u^2}{u^2 + 2m}\right) dt^2$$

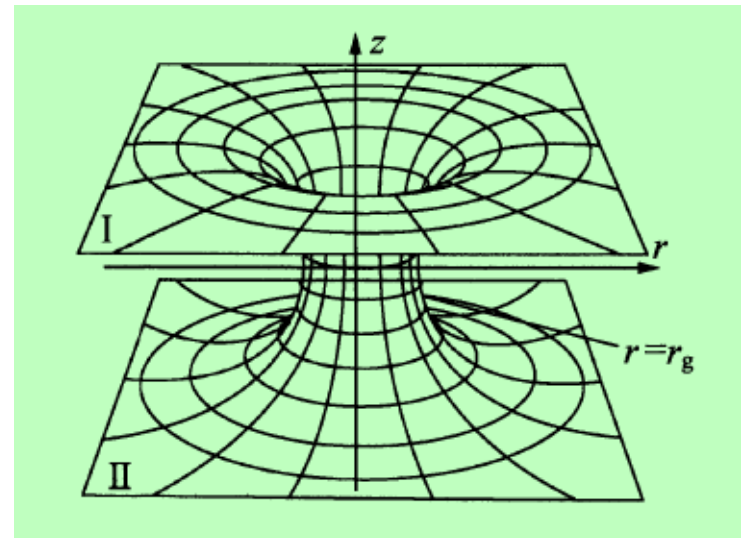
- 考虑 t, θ 为常数时，做坐标变换：

$$z = 2u\sqrt{2m} = 2\sqrt{2m(r - 2m)}$$

可得：

$$ds^2 = dr^2 + dz^2 + r^2 d\phi^2$$

在三维空间中其镶嵌图如右图所示^[12]：



Morris和Thorne的可穿行虫洞^[3]

- 一般的静态球对称虫洞：

$$ds^2 = -e^{2\Phi(r)}c^2dt^2 + \left(1 - \frac{b(r)}{r}\right)^{-1} dr^2 + r^2(d\theta^2 + \sin\theta d\phi^2)$$

- 结合爱因斯坦场方程，可得：（ $\rho(r)$ 为能量密度； $\tau(r)$ 为径向压强； $P(r)$ 为横向压强）

$$\begin{aligned}\rho(r) &= \frac{b'}{8\pi Gc^{-2}r^2} \\ \tau(r) &= \frac{b/r - 2(r-b)\Phi'}{8\pi Gc^{-4}r^2} \\ P(r) &= \frac{r}{2}[(\rho c^2 - \tau)\Phi' - \tau'] - \tau\end{aligned}$$

- 为满足“喉咙”处的相关边界条件，进一步的分析表明：

$$\rho c^2 + \tau < 0 \text{ 或 } \rho < 0$$

即虫洞喉部存在违背平均弱能量条件的物质（平均能量密度为负的物质）。

卡西米尔效应^[13]与虫洞

- 1948年荷兰物理学家 Casimir 提出一种现象：真空中两片中性的金属板之间会出现吸力，板间的真空能量低于外部的真空能量（定义为能量的零点），即两板之间的区域将具有负能量。

$$P = \frac{-\pi^2 \hbar c}{240a^4}$$

- 一种解释基于真空电磁场的涨落和零点能的变化，认为 Casimir 能量是自由空间中加入边界后零点能的变化值，也就是“真空不空”。
- 另一种解释是基于经典的辐射压，认为 Casimir 力是作用在平板外表面的向里的辐射压和内表面向外的辐射压的差值产生的。

霍金解^[8]

• 边界条件：

(1)、在渐进无穷远或洞口外，虫洞波函数应衰减为0；

(2)、在其他情况下，虫洞波函数应是正规的。

• 在耦合标量场情况下，可得 W-D 方程：

$$\left[-\frac{\partial^2}{\partial f_n^2} + (n^2 + 1)f_n^2 - \left(-\frac{\partial^2}{\partial a^2} + a^2 \right) \right] \Psi(a, f_n) = 0$$

解得：

$$\Psi(a, f_n) = \Psi_0(a) \Pi_n \psi_n(f_n)$$

其中：

$$\Psi_0(a) \propto e^{-\frac{a^2}{2}} H_l(a)$$

$$\psi_{nm} \propto e^{-\frac{\beta^2 f_n^2}{2}} H_m(\beta f_n), \quad \beta^4 = n^2 + 1$$

Coleman-Lee解^[10]

- 考虑有质量复标量场与引力场的最小耦合欧氏作用量：

$$I = \int_{\mathcal{M}} d^4x \sqrt{g} E (M_P^2 R_E + 1/2 \partial^\mu \varphi^* \partial_\mu \varphi + 1/2 m^2 \varphi^* \varphi) + 2M_P^2 \int_{\partial\mathcal{M}} d^3x h^{1/2} K_E$$

令： $\varphi = f e^{-i\theta} / \sqrt{2} = f(t) e^{-\phi(t)} / \sqrt{2}$ ， $\phi = i\theta$ ， $A_{\pm} = A_0 \pm A_1 = f e^{\pm\phi}$

可得：

$$\begin{cases} \ddot{f} + 3 \frac{\dot{a}}{a} \dot{f} + f \dot{\theta}^2 - m^2 f = 0 \\ \dot{a}^2 = 1 + \frac{1}{12} M_P^{-2} a^2 (\dot{f}^2 - f^2 \dot{\theta}^2 - m^2 f^2) \end{cases}$$

- 1、G-S解^[9]： $m=0, f=\text{常数}$)

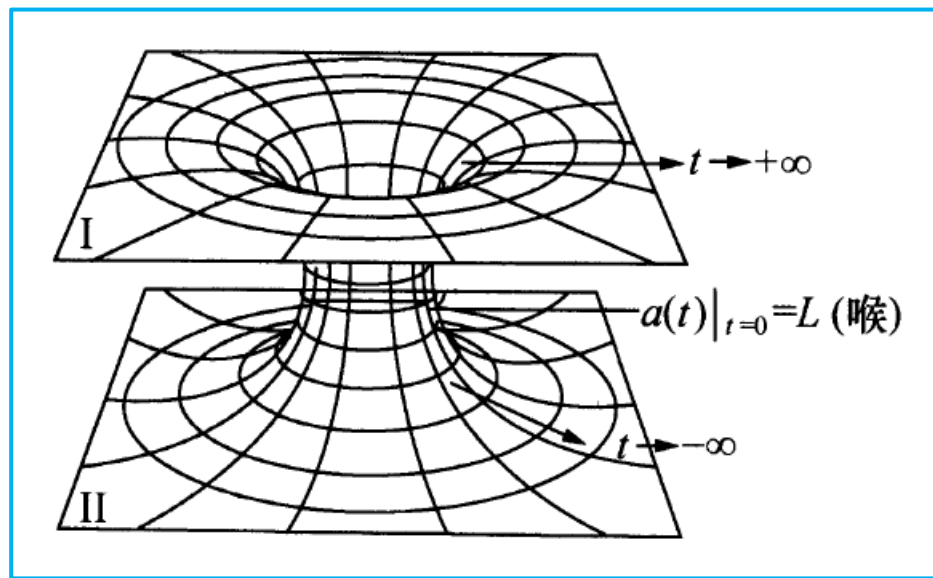
$$\dot{a}^2 = 1 - \frac{L^4}{a^4}, \quad L^4 = \frac{q^2}{48\pi^4 M_P^2 f^2}$$

- 2、大质量虫洞解： $ma \gg 1$

$$\dot{a}^2 = 1 - \frac{L}{a}, \quad L = \frac{mq}{12\pi^2 M_P^2}$$

- 3、小质量虫洞解： $ma \ll 1$

$$\dot{a}^2 = 1 - \frac{L^4}{a^4}, \quad L^4 = \frac{q^2}{48\pi^4 M_P^2 A_0^2}$$



虫洞示意图^[12]

时间旅行

- 1895年英国作家 Wells 在他的科幻小说《The Time Machine》中首次提出“时间旅行”概念，将时间作为第四个维度^[21]。

Filby became **pensive**. 'Clearly,' the Time Traveller proceeded, 'any real body must have extension in *four* directions: it must have Length, Breadth, Thickness, and--Duration. But through a natural **infirmity** of the flesh, which I will explain to you in a moment, we **incline** to **overlook** this fact. **There are really four dimensions, three which we call the three planes of Space, and a fourth, Time.** There is, however, a tendency to draw an **unreal** distinction between the former three dimensions and the latter, because it happens that our consciousness **moves intermittently** in one direction along the latter from the beginning to the end of our lives.'

- 1905年Einstein在狭义相对论的开山之作《On the Electrodynamics of Moving Bodies》中提出时间膨胀效应^[14]。

Zwischen die Größen x , t und τ , welche sich auf den Ort dieser Uhr beziehen, gelten offenbar die Gleichungen:

$$\tau = \frac{1}{\sqrt{1 - \left(\frac{v}{V}\right)^2}} \left(t - \frac{v}{V^2} x \right)$$

und

$$x = v t.$$

Es ist also

$$\tau = t \sqrt{1 - \left(\frac{v}{V}\right)^2} = t - \left(1 - \sqrt{1 - \left(\frac{v}{V}\right)^2}\right) t,$$

woraus folgt, daß die Angabe der Uhr (im ruhenden System betrachtet) pro Sekunde um $(1 - \sqrt{1 - (v/V)^2})$ Sek. oder — bis auf Größen vierter und höherer Ordnung um $\frac{1}{2}(v/V)^2$ Sek. zurückbleibt.

哥德尔宇宙^[17]

- 1949年逻辑学家 Gödel 发现了广义相对论的一个奇特解，存在 CTC。
- 条件是存在灰尘物质（无压强物质）以及一个负宇宙学常数，灰尘物质同时围绕一个轴在旋转，被称为“哥德尔宇宙” (Gödel universe) ^[21]：

$$\begin{cases} ds^2 = \frac{4}{\beta^2} [dt^2 - dr^2 + (\sinh^4 r - \sinh^2 r)d\varphi^2 + 2\sqrt{2}\sinh^2 r dt d\varphi] - dz^2 \\ R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}Rg_{\mu\nu} + \Lambda g_{\mu\nu} = -T_{\mu\nu} \\ T^{\mu\nu} = \rho u^\mu u^\nu, \quad \Lambda = -\frac{\beta^2}{2}, \quad \rho = \beta^2 \end{cases}$$

存在 CTC：

$$t = t_0, \quad r = r_0, \quad \varphi \in [-\pi, \pi], \quad z = 0, \quad \text{其中 } r_0 > r_c = \log(1 + \sqrt{2})$$

其他的一些存在CTC解的情况，如 Stockum-Tipler解；Gott解；Kerr黑洞；量子线路中的模拟CTC，这里不作进一步的介绍。

Morris等的时间机器^[4]

- 1988年Morris、Thorne和 Yurtsever 结合狭义相对论和可穿行虫洞构造了一个时间机器。外部空间固有时记为 T , 内部固有时记为 t 。
- 起初, 把内外空间时间调到一致。再利用相对论对洞口 B 操作, 使得 B 口内空间与外空间存在时间差。

- 一般来说, δ 比较大, $\Delta\tau$ 较小。

$$T_L = t_l$$

$$t_R = T_R - \delta$$

$$|t_L - t_R| = \Delta\tau$$

- 1、如果从 L 口进入, R 口出来。穿越到未来。

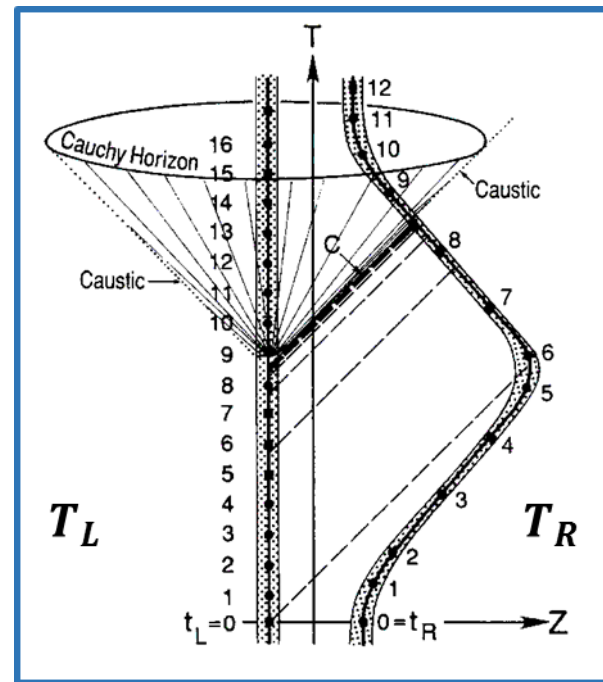
$$T_R = t_R + \delta = t_l + \Delta\tau + \delta = T_L + \Delta\tau + \delta$$

$$T_R - T_L = \delta + \Delta\tau$$

- 2、如果从 R 口进入, L 口出来。穿越到过去。

$$T_L = t_l = t_R + \Delta\tau = T_R - \delta + \Delta\tau$$

$$T_R - T_L = \delta - \Delta\tau$$



时间机器与因果律

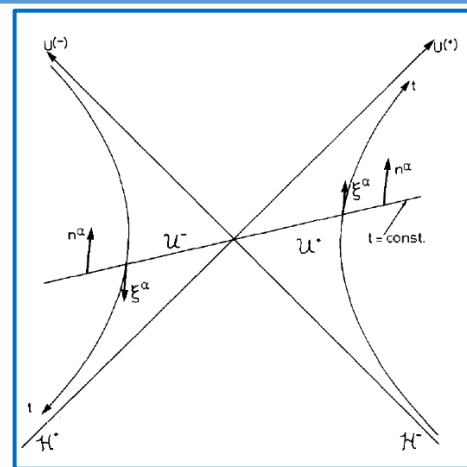
- 1992年 Hawking 提出**时序保护猜想**^[22]：似乎有一个时序保护机制，防止封闭类时曲线的生成，从而让历史学家得到安全的宇宙。进而否定了时间旅行的可能性。
 - 上世纪70年代末80年代初 Novikov 提出**自治性原则**^[23]：出现在真实宇宙中的物理规律的解，只能是那些整体自治的解。不完全否定闭合类时曲线的存在，但是穿越回过去一定不能改变历史，不能违反因果性。
-
- **祖父悖论**：一个人回到过去并杀死自己的祖父，从而抹杀自己父亲或母亲的存在，间接也抹杀了自己的存在。
 - **信息起源悖论**：一个人回到过去将某个数学家发现的定理告诉年轻的自己，那么关于这个数学定理的起源就成了一个谜题。

大 纲

- 量子纠缠
- 经典虫洞与时空旅行
- 热态与ER=EPR 猜想
- ER=EPR?
- 总结与讨论

ER=EPR起源^[11]

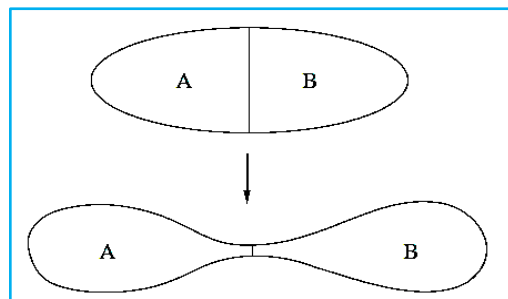
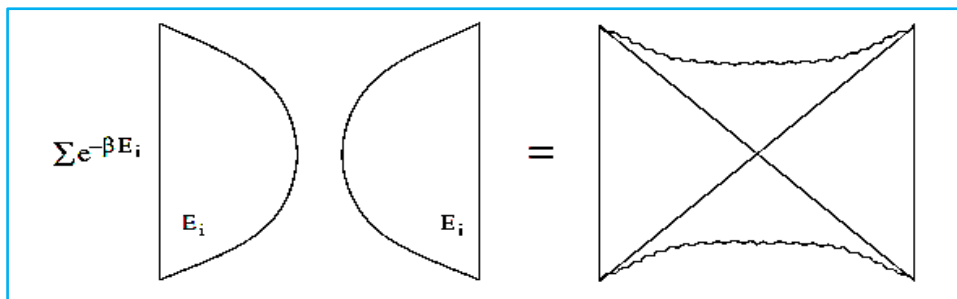
- 1974年，霍金发现黑洞热辐射。
- 1976年 Israel 研究黑洞的热场动力学的工作 [24]。



- 2001年 Maldacena 提出热场二重态对应于永恒 AdS 黑洞^[25]。

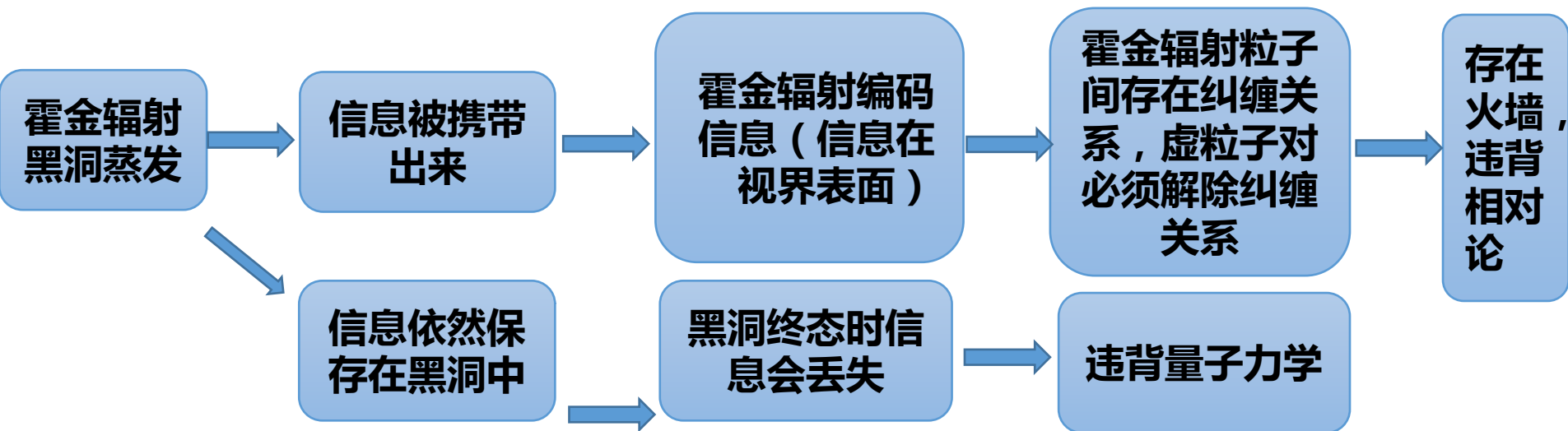
The proposal is that *two copies of the CFT in the particular pure (entangled) state (2.3) is approximately described by gravity on the extended AdS Schwarzschild spacetime.* The meaning of the word “approximately” will become clear later. The “boost” symmetry of

- 2010年 Raamsdonk 指出量子纠缠和时空之间的联系^[27]。



防火墙佯谬 (AMPS佯谬) 与ER=EPR

- **黑洞信息丢失问题**：1976年，霍金指出，由于黑洞辐射为热辐射谱，辐射之间没有关联，黑洞内部物质信息无法被携带出黑洞。伴随着黑洞辐射，信息会逐渐丢失。

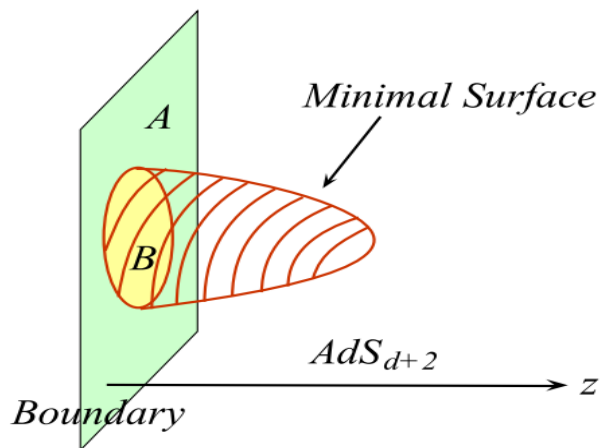


- **防火墙佯谬^[28]**：黑洞的视界周围，存在一堵防火墙，这个能量巨大的防火墙可以保证任何进入其中的粒子与外界的纠缠状态被破坏。

全息原理与全息纠缠熵

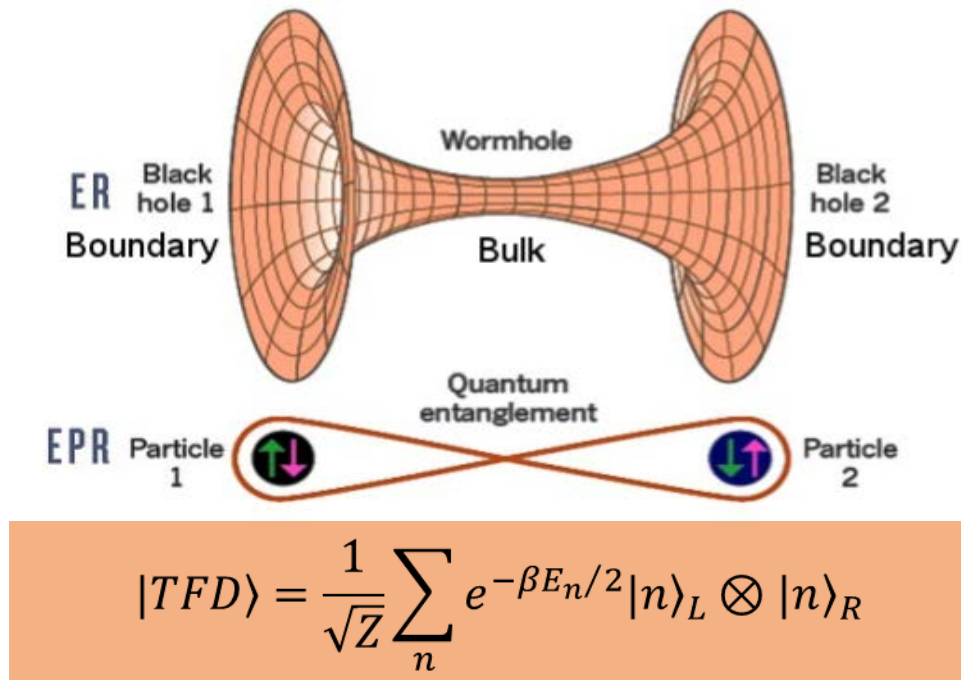
- **全息原理**： $d+1$ 维量子引力系统内部的自由度可以完全用其 d 维边界上的不包含引力的量子场的自由度来描述。比如说，四维时空的所有信息可能完全包含在其边界三维曲面上^[29]。
- **AdS/CFT对偶**：
 - 1、 $AdS_5 \times S^5$ 上的 IIB 型弦理论等价于四维边界上的 $N=4$ 超对称杨 - 米尔斯理论^[30]；
 - 2、 $AdS_4 \times S^7$ 上的 M 理论等价于三维的 ABJM 超共形场论^[31]。
- **全息纠缠熵公式 (R-T公式)** ^[26]：

$$S_{EE} = \frac{\text{Area}(\gamma_A)}{4G_N}$$



ER=EPR^[11]

- **ER**: 爱因斯坦-罗森桥，代指虫洞； **EPR**: EPR佯谬，代指量子纠缠。

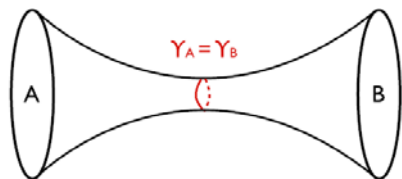


- 反过来理解，纠缠体系中存在虫洞的几何结构。
- ER=EPR 不是一个公式，是一个标语，一种思想。强调了量子纠缠与时空之间的深刻联系。

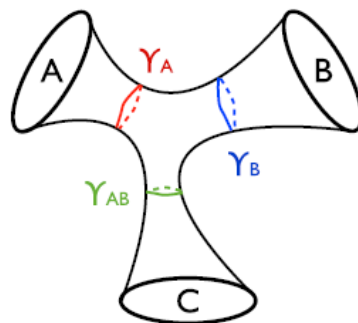
简单验证[32,2014]

• 令：

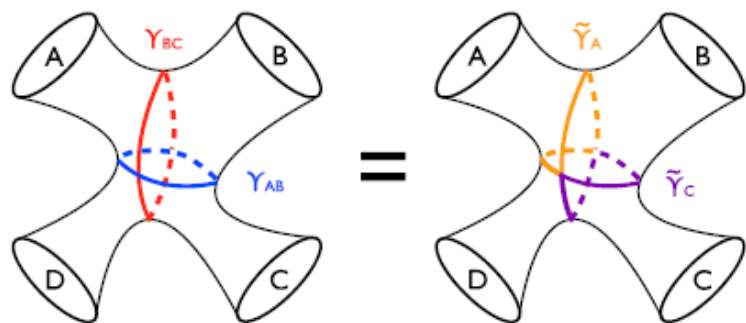
$$S_{ER}(A) = a(\gamma_A)$$



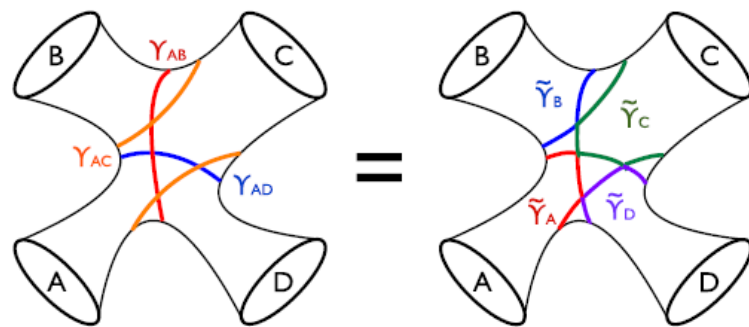
$$S_{ER}(AB) = a(\gamma_{AB})$$



• 满足纠缠熵的一些不等式：



$$S_{ER}(A) + S_{ER}(C) \leq S_{ER}(AB) + S_{ER}(BC)$$



$$S_{ER}(A) + S_{ER}(B) + S_{ER}(C) + S_{ER}(ABC) \leq S_{ER}(AB) + S_{ER}(BC) + S_{ER}(AC)$$

复杂度

- 在继续用纠缠熵来研究全息时空时，遇到了一些困难，比如虫洞的增长时间要比纠缠熵增长时间长。为此，引入量子信息与计算机科学领域的复杂度这一工具^[33]。
- **量子电路**：态和态之间的复杂度被定义为量子电路中用到的基本量子逻辑门数量的最小值。

初始态： $|\Psi\rangle_R = |\uparrow\uparrow\uparrow\uparrow \dots \uparrow\uparrow\uparrow\uparrow\rangle$

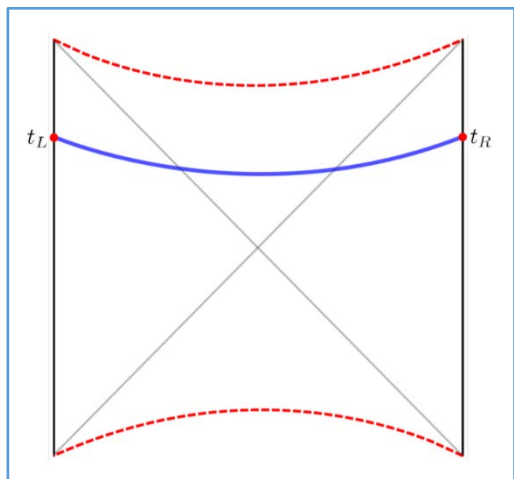
目标态： $|\Psi\rangle_T = |\uparrow\downarrow\uparrow\downarrow \dots \uparrow\downarrow\uparrow\rangle$

么正变换： $|\Psi\rangle_T = U |\Psi\rangle_R$ ， $U = g_n g_{n-1} g_{n-2} \dots g_1$

等号在哪里？

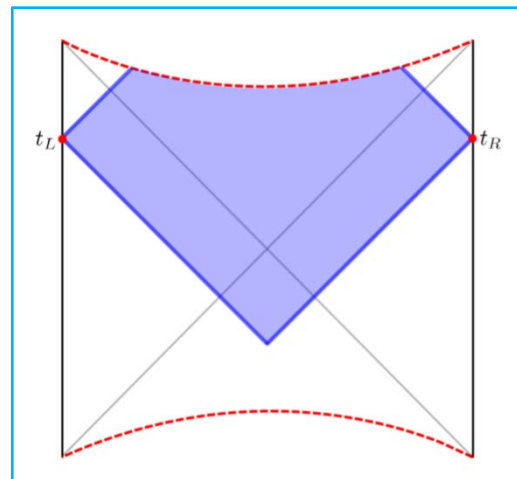
- 引力角度：C-V对偶^[34]和C-A对偶^[35]；

Complexity = Volume



$$C_V \approx \frac{V}{G_N l_{AdS}}$$

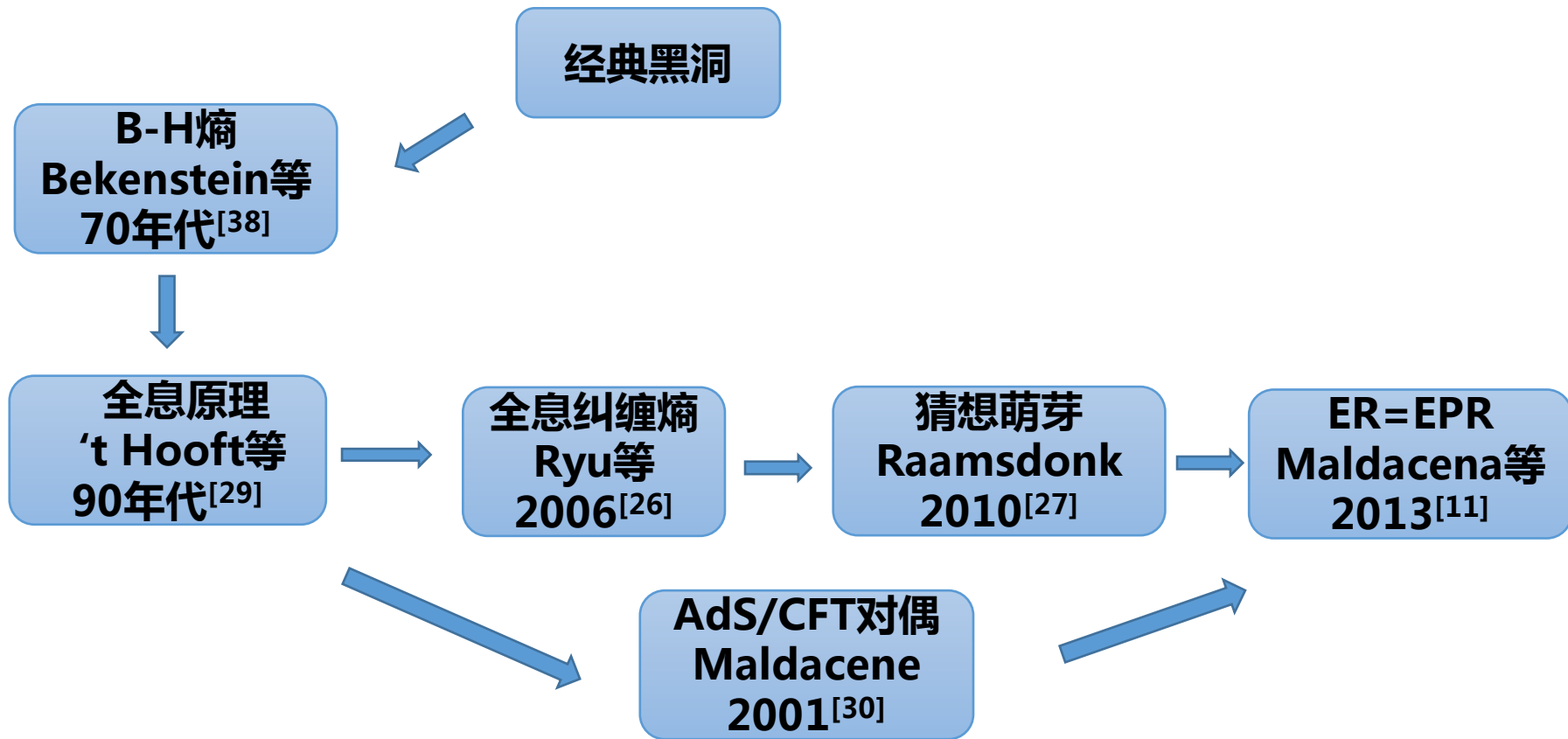
Complexity = Action



$$C_A \approx \frac{A_{WdW}}{\pi \hbar}$$

- **场论角度**：在黎曼几何框架下，将初始态和目标态看作态空间中固定的两个端点，两点之间的么正变换可以由不同曲线表示，曲线的长度代表了需要的量子门的数量。寻找最优量子电路的问题就转化为寻找最短路径的问题，即求解黎曼几何中测地线的问题^[36]。

ER=EPR时空观



- 时空是依靠纠缠编织起来的。纠缠就像是时空的粘合剂，将时空碎片粘合在一起形成一个完整的时空。

大 纲

- 量子纠缠
- 经典虫洞
- 热态与ER=EPR猜想
- ER=EPR?
- 总结与讨论

疑问一

1. Maldacena猜测ER=EPR，主要基于热态
- 2.如果是热态，Hawking辐射非么正，引力和量子力学不兼容
3. Wilczek等人已经证明，Hawking辐射是非热辐射，ER=EPR假设基础是否正确？

$$|\Psi\rangle = \sum_n e^{-\beta E_n/2} |n, n\rangle$$

疑问二

1. 黑洞面积熵起源于纠缠熵?

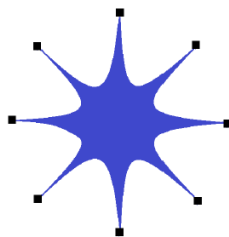
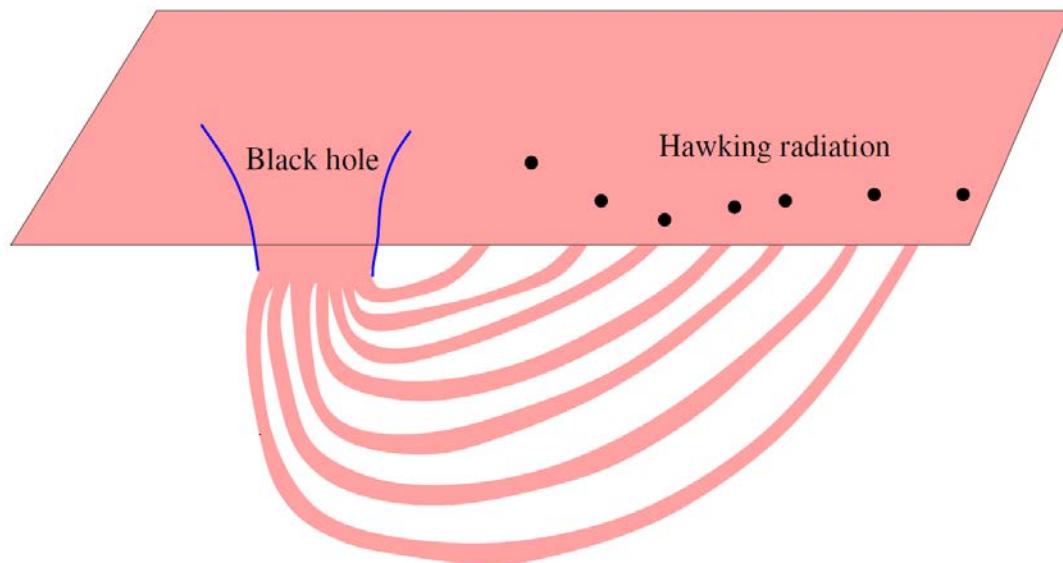


Figure 12: Entanglement pattern for a generic state of qubits. The black dots are the qubits and the shaded region attempts to capture the pattern of entanglement.

疑问三

1. 从霍金辐射构造纠缠黑洞，违背纠缠monogamy特性



疑问四

1. 可以证明：ER=EPR将冲突量子力学线性

大 纲

- 量子纠缠
- 经典虫洞
- 热态与ER=EPR猜想
- ER=EPR?
- 总结与讨论

总结与讨论

- ER=EPR猜想很有趣、引起了很多反响。
- ER=EPR建立在热态之上，是否正确需要严格考虑。
- “it from qubit” ？

请批评指正！