

黑洞精确解——99大寿

吕宏
北京师范大学

摘要

2015是爱因斯坦广义相对论的百年大寿，也是黑洞精确解，Schwarzschild黑洞，问世99年之际。中国传统，庆寿做九不做十。我们将利用一小时回顾一下99年来黑洞解析解的构造和成果。

4:00pm, March 27, 2015

©中国科技大学交叉中心

黑洞是爱因斯坦引力理论预测的一个让人(甚至门外汉也)极感兴趣物体。

它让人同时产生一种神秘感(只进不出)和危险感:

- 如果在我们的太阳系里,把太阳换成一个同质量和角动量的黑洞,太阳系的行星运行轨道将发生怎样变化?
- 如果LHC加速器对撞机产生一个微观黑洞,它会逐渐长大,从而把整个地球吞没吗?

还有什么比神秘与危险这个组合体更能激发人的好奇之心?

Einstein Theory of Gravity(1915)

$$G_{\mu\nu} \equiv R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}Rg_{\mu\nu} = \frac{8\pi G}{c^4}T_{\mu\nu}$$

$G_{\mu\nu}$ is called Einstein tensor.

真空方程: $G_{\mu\nu} = 0$.

具体一点: 给出一个时空度规 $ds^2 = g_{\mu\nu}(x)dx^\mu dx^\nu$, $x^\mu = \{t, x, y, z\}$

$$\begin{aligned}g^{\mu\nu} &: g_{\mu\lambda}g^{\nu\lambda} = \delta_\mu^\nu, \\ \Gamma^\rho_{\mu\nu} &= \frac{1}{2}g^{\rho\lambda}(\partial_\nu g_{\lambda\mu} + \partial_\mu g_{\lambda\nu} - \partial_\lambda g_{\mu\nu}), \\ R^\rho_{\sigma\mu\nu} &= \partial_\mu \Gamma^\rho_{\nu\sigma} - \partial_\nu \Gamma^\rho_{\mu\sigma} + \Gamma^\rho_{\mu\lambda}\Gamma^\lambda_{\nu\sigma} - \Gamma^\rho_{\nu\lambda}\Gamma^\lambda_{\mu\sigma}, \\ R_{\mu\nu} &= R^\rho_{\mu\rho\nu}, \quad R = R^\mu_{\mu}.\end{aligned}$$

由此可见，爱因斯坦运动方程是个非常非线性化的方程：有六个函数 $(\frac{1}{2}(4 \times 5) - 4 = 6)$ 、四个变量 (t, x, y, z) 的一套非线性二阶微分方程。

咋一看，也许不指望可以找出非平庸的一个精确解。

平庸解：Minkowski平坦时空： $ds^2 = -dt^2 + dx^2 + dy^2 + dz^2$ ，也就是所有 $g_{\mu\nu}$ 都是常数，因而所有联络 $\Gamma^\rho_{\mu\nu}$ ，Riemann张量 $R^\mu_{\nu\rho\sigma}$ ，Ricci张量 $R_{\mu\nu}$ 和Ricci标量 R 都为零。Einstein真空运动方程自动满足。

静态球对称黑洞

Schwarzschild (1916):

$$ds^2 = -f dt^2 + \frac{dr^2}{f} + r^2 d\Omega_2^2$$

$$f = 1 - \frac{2m}{r}, \quad d\Omega_2^2 = d\theta^2 + \sin^2 \theta d\phi^2$$

This is a vacuum solution $G_{\mu\nu} = 0$. 真空怎么可能有黑洞?

Asymptotic ($r \rightarrow \infty$) flat (Minkowski): $f \rightarrow 1$ and
 $ds^2 = -dt^2 + dr^2 + r^2 d\Omega_2^2$

但是这个解有用吗? 即使在宇宙中黑洞存在, 但我们太阳系、地球没有什么黑洞的踪迹, 我们能用此来验证广义相对论吗?

Gravity vs. EM

Compare to electric potential:

$$\square\phi = 0 \quad \rightarrow \quad \phi = \frac{q}{r} \quad \rightarrow \quad \square\phi = 4\pi\delta(r)$$

The electric potential outside a spherical ball of uniformly-distributed charge is the same as that created by a point charge of equal total charge.

The gravitational field outside the Sun is the same as that created by the black hole of the same mass.

Thus the Schwarzschild black hole solution makes it possible to test General Relativity.

在任何一个物理领域里，精确解是非常有用的。

太阳表面外的引力场，和同质量、同角动量的黑洞产生的引力场没有区别。因此黑洞解可以用来计算广义相对论对牛顿引力下的行星运动轨道、卫星运动轨道计算的修正。

这种修正，可以指导实验观测广义相对论的正确与否。

广义相对论的观测证据

现代物理的两大支柱，量子力学和相对论，其效应在平时生活中都不是显而易见的。但量子效应，可以通过精密设计的实验加以放大，从而被观测到。

但是，广义相对论对于牛顿引力的修正，是没法通过小巧的精密实验设备来放大。我们只能通过自然界现有的大尺度天然设备，比太阳、转动的太阳系、转动地球来观测其效应。

问题：为什么可以在自己家里做实验来看到量子效应，但没法用这个方法来看看到广义相对论效应？

黑洞存在

研究引力方向的物理学界如今已达到一种普识：黑洞在宇宙中是存在的，大概有 $> 10^{20}$ 之多。

但是黑洞研究的一个非常重要的动机是理论的。

黑洞研究的理论价值

黑洞定义：有个（有限）视界面

- 黑洞有不可避免的引力塌缩奇点，因而证明经典广义相对论是不完备的。（如果假定质量和体积成正比的话，牛顿引力就没有这方面的困境。）
- 但黑洞奇点，也就是时空撕裂，又被视界面遮住。（因此不是裸奇点。）
- 黑洞的霍金蒸发，是一个我们“唯一”的比较了解的(半经典)量子引力过程。（温度 $\sim \hbar$ ，熵 $\sim 1/\hbar$ 。）
- 黑洞的无毛定理，意味着黑洞是世界上最简单，最纯粹的热力学系统。
- 黑洞热力学第一定律： $dM = TdS + \Omega dJ + \dots$

注：黑洞的无毛定理：黑洞视界面外部的所有性质，完全由守恒量描述，比如质量，角动量，电荷等。

霍金蒸发(热辐射)

温度:

$$T = \frac{\hbar c^3}{8\pi G M k_B} \approx \frac{1.227 \times 10^{23} \text{kg}}{M} K$$

太阳质量的黑洞: $T \approx 10^{-7} K$.

LHC黑洞:

(核炸弹能量释放能量: $M \sim 10g$, $r_s \sim 10^{-25}m$, $T \sim 10^{27} K$.)

时间:

$$t = \frac{5120\pi G^2 M_0^3}{\hbar c^4} \approx 8.671 \frac{M_0^3}{M_p^3} \times 10^{-40} \text{秒}$$

M_p Planck 质量。

太阳质量的黑洞的蒸发时间: $t \approx 10^{74}$ 秒。

LHC黑洞: $t \ll 10^{-22}$ 秒。

即使Hawking错了, 没有霍金蒸发, 微观黑洞在地球上形成宏观黑洞的时间要比宇宙寿命长, 因此它必然会离开地球, 遨游太空。没有霍金蒸发的微观黑洞的性质象暗物质: 除了微弱的引力外, 几乎不和别的物质发生相互作用。

再回到黑洞精确解

Schwarzschild (1916):

$$ds^2 = -f dt^2 + \frac{dr^2}{f} + r^2 d\Omega_2^2,$$
$$f = 1 - \frac{2m}{r}, \quad d\Omega_2^2 = d\theta^2 + \sin^2 \theta d\phi^2.$$

This is a vacuum solution $G_{\mu\nu} = 0$.

一个有趣的性质:

$$-f dt^2 + \frac{dr^2}{f} = -f \left(dt^2 - \frac{dr^2}{f^2} \right) = -f \left(dt + \frac{dr}{f} \right) \left(dt - \frac{dr}{f} \right)$$

Define $du = dt + \frac{dr}{f}$, we have

$$ds^2 = 2dudr - du^2 + r^2 d\Omega_2^2 + \frac{2m}{r} du^2$$
$$= -d\tilde{t}^2 + dr^2 + r^2 d\Omega_2^2 + \frac{2m}{r} (d\tilde{t} + dr)^2,$$

where $u \rightarrow \tilde{t} + r$. In other words, a black hole is a **linear** perturbation of the Minkowski spacetime.

Schwarzschild-(A)dS

Schwarzschild black hole is asymptotic flat, but our universe has a cosmological constant.

Maximal symmetric spacetime in Einstein theory is Minkowski

Maximal symmetric spacetime in Einstein theory with a cosmological constant is (Anti-)de Sitter or (A)dS.

Schwarzschild-(A)dS:

$$ds^2 = -f dt^2 + \frac{dr^2}{f} + r^2 d\Omega_2^2$$

$$f = 1 - \frac{1}{3}\Lambda r^2 - \frac{2m}{r}$$

The cosmological constant in our universe is too small to be testable within our solar system.

But the Sun is Rotating



转动对时空的影响

From Newtonian gravity, the gravitational field created by the Sun (assuming its spherically symmetric) is independent of its rotation.

Einstein theory predicts that the rotation of the matter can drag the spacetime around it.

这是牛顿引力和爱因斯坦理论的重大分歧，从而提供了检验广义相对论的一个观测标准。

Rotating Black Hole: Kerr Solution

Kerr metric (1963): $G_{\mu\nu} = 0$

$$ds^2 = \rho^2 \left(\frac{dr^2}{\Delta_r} + d\theta^2 \right) + \frac{\sin^2 \theta \Delta_\theta}{\rho^2} \left(a dt - (r^2 + a^2) d\phi \right)^2 - \frac{\Delta_r}{\rho^2} \left(dt - a \sin^2 \theta d\phi \right)^2,$$

$$\rho^2 = r^2 + a^2 \cos^2 \theta, \quad \Delta_r = r^2 + a^2 - 2mr$$

- Mass: $M = m$
- Angular momentum: $J = ma$
- $J \leq M^2$

The metric is asymptotic flat.

t : 时间; r : 径向坐标; θ : 纬度 $[0, \pi]$; ϕ : 经度 $[0, 2\pi)$ 。

Kerr-(A)dS

Carter (1968):

$$ds^2 = \rho^2 \left(\frac{dr^2}{\Delta_r} + \frac{d\theta^2}{\Delta_\theta} \right) + \frac{\sin^2 \theta \Delta_\theta}{\rho^2} \left(a dt - (r^2 + a^2) \frac{d\phi}{\Xi} \right)^2 - \frac{\Delta_r}{\rho^2} \left(dt - a \sin^2 \theta \frac{d\phi}{\Xi} \right)^2,$$

$$\rho^2 = r^2 + a^2 \cos^2 \theta, \quad \Xi = 1 + \frac{1}{3} \Lambda a^2$$

$$\Delta_r = (r^2 + a^2) \left(1 - \frac{1}{3} \Lambda r^2 \right) - 2mr$$

$$\Delta_\theta = 1 + \frac{1}{3} \Lambda a^2 \cos^2 \theta$$

黑洞的拓扑

黑洞的拓扑描写的是黑洞视界面的几何特性。四维时空黑洞的拓扑都是球体。球对称的Schwarzschild黑洞必然是圆球体。转动的Kerr黑洞是椭圆球体。黑洞的视界面也可以受到黑洞外的物体影响而变得不规则，但球体拓扑是不会改变的。

Generalize to higher dimensions

- Asymptotic Minkowski: Meyer and Perry (1986)
- Asymptotic (A)dS: $D = 5$ Hawking, Hunter and Robinson (1998)
- Asymptotic (A)dS: Arbitrary D , Gibbons, L, Page and Pope, [Phys. Rev. Lett. **93** \(2004\) 171102](#).

高维黑洞的新拓扑

在高维时空中，除了球体拓扑外，黑洞还可以是另外的拓扑。比如在5维时空，除了 S^3 拓扑的黑洞外，还可以有 $S^2 \times S^1$ 拓扑。描写这种拓扑黑环(black ring)的精确解在2002被Emparan和Reall构造出来
([Phys.Rev.Lett. 88 \(2002\) 101101](#))

在高维时空中到底有多少这类新的黑洞解，如何归类，目前人们还没有多少头绪。

带电黑洞

Einstein-Maxwell理论:

$$\mathcal{L} = \sqrt{-g}(R - F_{\mu\nu}F^{\mu\nu}), \quad F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu.$$

Reissner-Nordström (RN)黑洞

$$ds^2 = -f dt^2 + \frac{dr^2}{f} + r^2 d\Omega_2^2, \quad f = 1 - \frac{2m}{r} + \frac{q^2}{r^2},$$

with $A = \frac{q}{r} dt$.

加宇宙学常数

$$f \rightarrow -\frac{1}{3}\Lambda r^2 + 1 - \frac{2m}{r} + \frac{q^2}{r^2}.$$

这个黑洞含有两个物理参数: 质量(m)和电荷(q).

带电转动: Kerr-Newman AdS solution

Charged AdS rotating black hole in four dimensions has long been known:

$$ds^2 = \rho^2 \left(\frac{dr^2}{\Delta_r} + \frac{d\theta^2}{\Delta_\theta} \right) + \frac{\Delta_\theta \sin^2 \theta}{\rho^2} \left(a dt - (r^2 + a^2) \frac{d\phi}{\Xi} \right)^2 - \frac{\Delta_r}{\rho^2} \left(dt - a \sin^2 \theta \frac{d\phi}{\Xi} \right)^2,$$
$$A = \frac{q r}{\rho^2} \left(dt - a \sin^2 \theta \frac{d\phi}{\Xi} \right) + \frac{p \cos \theta}{\rho^2} \left(a dt - (r^2 + a^2) \frac{d\phi}{\Xi} \right),$$

where,

$$\rho^2 = r^2 + a^2 \cos^2 \theta, \quad \Delta_\theta = 1 + \frac{1}{3} \Lambda a^2 \cos^2 \theta, \quad \Xi = 1 + \frac{1}{3} \Lambda a^2,$$
$$\Delta_r = (r^2 + a^2) \left(1 - \frac{1}{3} \Lambda r^2 \right) - 2mr + p^2 + q^2.$$

带电转动：向高维推广

RN黑洞，也就是在Einstein-Maxwell理论中带电球对称静态黑洞，可以很容易地向高维推广。但带电转动黑洞，在Einstein-Maxwell理论框架下，除了四维的Kerr-Newman解外，还没有一个高维精确解的例子。

超引力中可以有：5维例子

5维EM理论

$$\mathcal{L} = \sqrt{-g}(R - \frac{1}{4}F^2).$$

5维EM超引力

$$\mathcal{L} = \sqrt{-g}(R - \frac{1}{4}F^2) + \frac{1}{12\sqrt{3}}\epsilon^{\mu\nu\rho\sigma\lambda}F_{\mu\nu}F_{\rho\sigma}A_{\lambda}.$$

5维规范EM超引力

$$\mathcal{L} = \sqrt{-g}(R - 2\Lambda - \frac{1}{4}F^2) + \frac{1}{12\sqrt{3}}\epsilon^{\mu\nu\rho\sigma\lambda}F_{\mu\nu}F_{\rho\sigma}A_{\lambda}.$$

5维规范EM超引力中的广泛带电转动黑洞解在2005年构造。Chong, Cvet-ic, L, Pope, Phys.Rev.Lett. 95 (2005) 161301.

目前在规范超引力中构造带电转动黑洞的专家是华西师范大学的吴双清教授。我们构造不出来的解都被他逐个构造出来了。

黑洞是如何形成的呢？

$$ds^2 = -f dt^2 + \frac{dr^2}{f} + r^2 d\Omega_2^2, \quad f = 1 - \frac{2GM}{c^2 r}$$

Schwarzschild半径: $r_s = 2M$. (Using natural units $G = 1 = c$.)

(均匀) 物质分布质量 $M \propto r^3$

因此即使密度不高的物体，只要足够大，也可形成视界面，成为黑洞。(例子：地球: $\rho \sim 5500 \text{kg/m}^3$. 固定 ρ , $r_s \sim 1.7 \times 10^{11} \text{m}$, $M \sim 10^{38} \text{kg}$. Typical mass of a black hole $\geq 10 \times M_\odot$.)

一旦视界面形成，视界面内的奇点就不可避免地会产生（在爱因斯坦经典引力框架下）。

以上讨论是静态的，黑洞具体的形成的动态过程可以有一个精确解来描述吗？

值得一提的是

由引力塌缩造成的黑洞必然是大黑洞，是太阳质量的十倍以上。

小黑洞，如果有的话，是在宇宙早期温度很高时形成的。

Vaidya metric

Kerr-Schild form

$$ds^2 = -f du \left(du \mp 2 \frac{dr}{f} \right) + \dots = \pm 2 du dr - f du^2 + r^2 d\Omega_2^2.$$

Vaidya metric

$$ds^2 = \pm 2 du dr - \left(1 - \frac{2M(u)}{r} \right) du^2 + r^2 d\Omega_2^2.$$

Energy-Momentum tensor $T_{uu} = \frac{2M'(u)}{r^2} \neq 0$.

$$T^{\mu\nu} T_{\mu\nu} = 0 \quad \text{and} \quad T^\mu{}_\mu = 0.$$

Pure radiative energy decaying or absorption.

Scalar hair black hole formation

Einstein-Scalar theory:

$$\mathcal{L} = \sqrt{-g} \left(R - \frac{1}{2}(\partial\phi)^2 - V(\phi) \right),$$
$$V = -2g^2(\cosh\phi + 2) - 2\alpha^2(2\phi + \phi \cosh\phi - 3\sinh\phi),$$

Dynamical solution:

$$ds^2 = 2dudr - H(r, u)du^2 + r(r + a(u))d\Omega_{2,k}^2, \quad e^\phi = 1 + \frac{a(u)}{r},$$

Equations of motion imply

$$a(u) = q \tanh\left(\frac{1}{2}\alpha^2 q u\right),$$
$$H = g^2 r^2 + k - \dot{a}(u) - \frac{1}{2}\alpha^2 a(u)^2 + (g^2 - \alpha^2) r a(u) \\ + \alpha^2 r^2 \left(1 + \frac{a(u)}{r}\right) \log\left(1 + \frac{a(u)}{r}\right).$$

Note $\lim_{u \rightarrow \infty} a(u) = q$, and in this limit, the solution becomes the static hairy black hole.

First example of exact black hole formation in literature. Zhang and L, Phys.Lett. B736 (2014) 455-458.

高阶导数引力

到目前，所有被实验基础理论都是二阶导数。这是个深奥的自然之谜？

Note that it is not necessarily mysterious that the nature selects the “two derivatives.”

Even if the theory is of higher derivatives, there must be IR regions where only the two-derivative terms dominate, a natural consequence of RG flow.

In other words, the higher-derivative terms will be highly suppressed by the fundamental scale, which happens to be 10^{19} GeV.

四维4阶导数引力

Einstein理论受Riemann张量的平方项的修正：

$$\mathcal{L}_4 = \sqrt{-g} \left(\kappa R + \alpha R^2 + \beta R^{\mu\nu} R_{\mu\nu} + \gamma R^{\mu\nu\rho\sigma} R_{\mu\nu\rho\sigma} \right).$$

(α, β, γ) 的量纲为 l_p^2 , $l_p \sim 10^{-33}$ 米：普朗克长度。

在四维时空中，一个叫Gauss-Bonnet的组合

$$\mathcal{L}_{GB} = \sqrt{-g} (R^2 - 4R^{\mu\nu} R_{\mu\nu} + R^{\mu\nu\rho\sigma} R_{\mu\nu\rho\sigma})$$

是个全导数，因此可以让 $\gamma = 0$ 。或者等价地写成

$$\mathcal{L} = \sqrt{-g} \left(\kappa R - \alpha C_{\mu\nu\rho\sigma} C^{\mu\nu\rho\sigma} + \beta R^2 \right).$$

where C is the Weyl tensor.

- 由于高阶导数，这个理论变成了一个可重整化理论。
- 由于高阶导数，这个理论有鬼场。
- 这个理论可以认为是超弦理论的一个微扰截断。

高阶导数项对黑洞的影响

这个高阶导数理论会对黑洞作怎样的修正？

结果发现，Schwarzschild黑洞和Kerr黑洞不受高阶导数的修正！

那么除了Schwarzschild黑洞外，还有别的黑洞解吗？

$$\mathcal{L} = \sqrt{-g} \left(\kappa R - \alpha C_{\mu\nu\rho\sigma} C^{\mu\nu\rho\sigma} + \beta R^2 \right).$$

如果 $\kappa = 0 = \beta$ ，这个理论叫共形引力。有新的黑洞解

- 静态：Riegert, Phys.Rev.Lett. 53 (1984) 315-318
- 转动：Liu and L, JHEP 1302 (2013) 139

我们考虑 $\kappa \neq 0 \neq \beta$,

可以证明，如果一个渐近平坦解有视界面，那么它的Ricci标量必然为邻： $R = 0$ 。Nelson (Phys.Rev.D **82** (2010) 104026,)

四维4阶导数黑洞有效理论

这样，四维4阶导数黑洞有效理论成为

$$\mathcal{L} = \sqrt{-g} (\kappa R - \alpha C_{\mu\nu\rho\sigma} C^{\mu\nu\rho\sigma}) .$$

Nelson发表论文宣称在这个理论中，如果渐近平坦的解有视界面的话，必然有 $R_{\mu\nu} = 0$ 。这就意味着，除了Schwarzschild黑洞外，不存在别的球对称静态黑洞。

我们发现他的证明是错误的。这就意味着除了Schwarzschild黑洞外，还可能存在一个新的黑洞。那么它存在吗？

用数值计算可以确实证明它的存在性。L,Perkins,pope and Stelle, arXiv:1502.01028.

渐近平坦行为

黑洞度规: $ds^2 = -h dt^2 + \frac{dr^2}{f} + r^2 d\Omega_2^2$ 渐进行为:

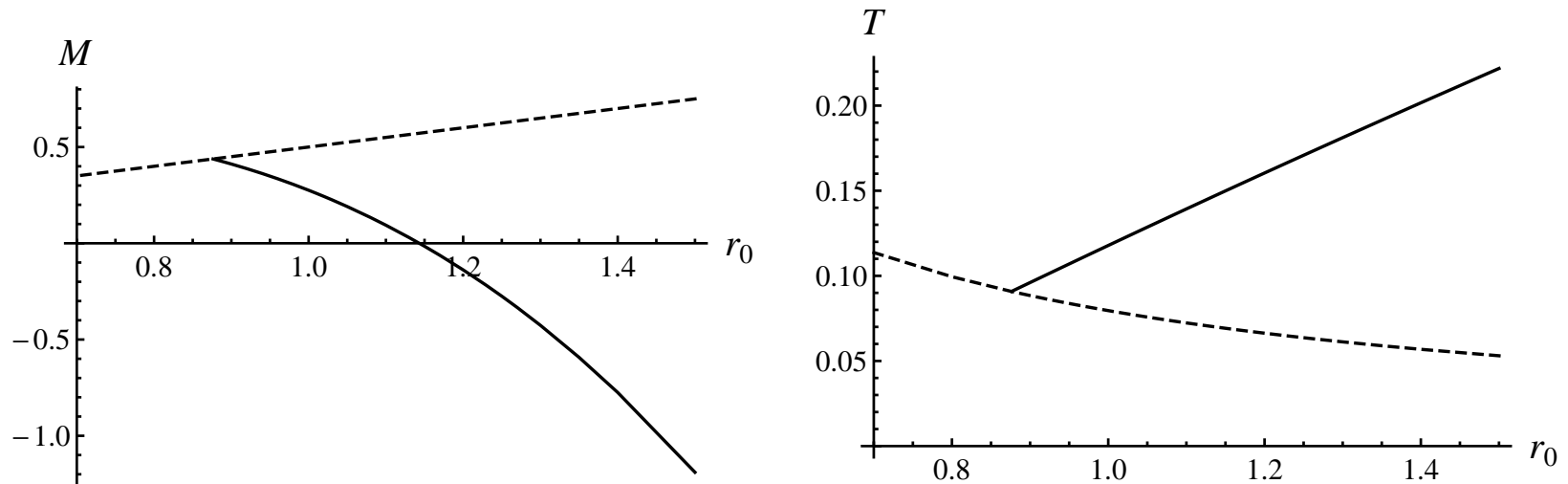
$$h = 1 - \frac{2M}{r} - \frac{c_1 e^{-\mu_2 r}}{r} - \frac{c_2 e^{\mu_2 r}}{r},$$
$$f = 1 - \frac{2M}{r} - \frac{1}{2} c_1 \left(\mu_2 + \frac{1}{r} \right) e^{-\mu_2 r} + \frac{1}{2} c_2 \left(\mu_2 - \frac{1}{r} \right) e^{\mu_2 r},$$

where $\mu_2^2 = 1/(2\alpha)$. 如果 $c_1 = c_2 = 0$ 给出 Schwarzschild 黑洞。

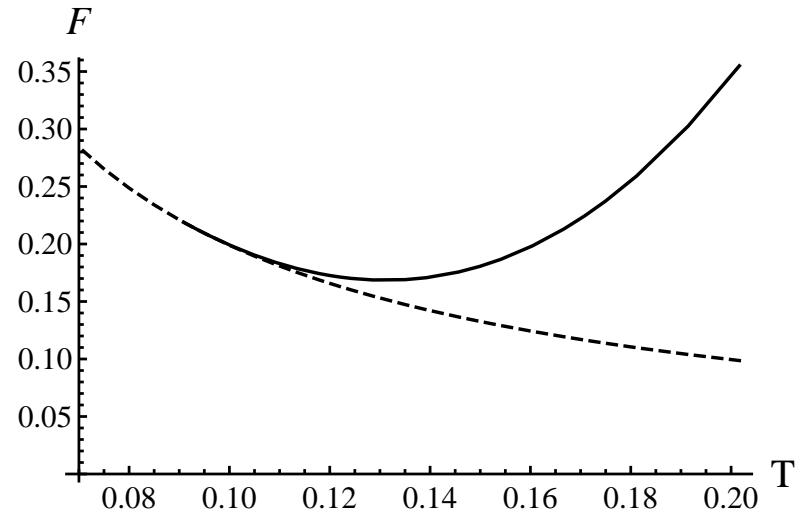
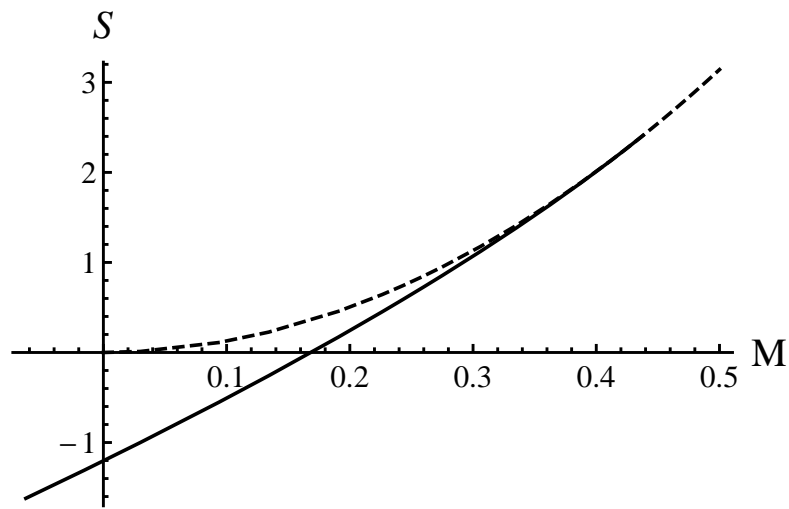
必须 $c_2 = 0$, 但是可以 $c_1 \neq 0$, 这样给出了一个可能的除了质量外的新黑洞。

我们的数值计算表明, 当质量 $M \leq 0.434\sqrt{2\kappa\alpha}$ 时, 可以有个新的黑洞。

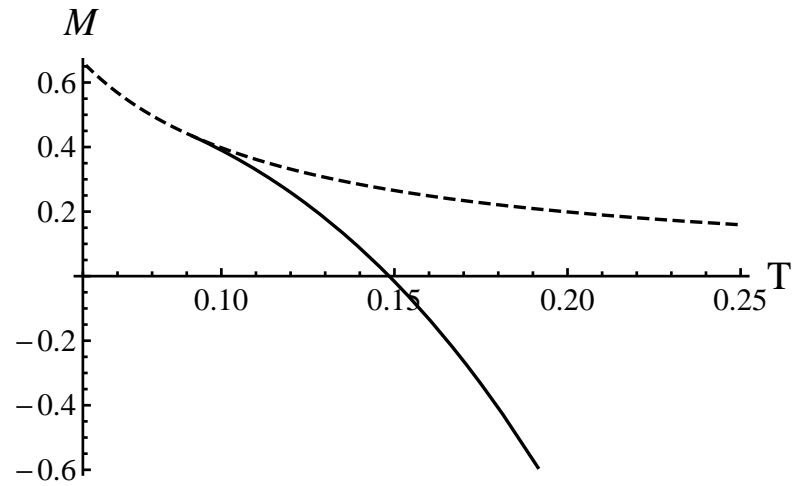
黑洞的一些性质



The masses (left plot) and temperatures (right plot) of the Schwarzschild (dashed line) and non-Schwarzschild (solid line) black holes as a function of the horizon radius r_0 .



The first plot shows the entropy as a function of mass, and the second shows the free energy $\bar{F} = M - TS$ as a function of T , for the Schwarzschild (dashed line) and non-Schwarzschild (solid line) black holes.



The mass M as the function of temperature T .

It is clear that we have

$$C_{\text{new}} < C_{\text{Schw}} < 0.$$

结论

物理学家有两类：一类建立方程；一类解方程。解Einstein方程本省显然已经提供了足够的智力乐趣和满足。99年来关于精确解

- 静态、稳态黑洞几乎全解
- 高维的非球形拓扑，除了5维渐近平坦黑环例之，了解甚少。
- 黑洞形成，高阶导数理论中黑洞，了解甚少。