A Pedagogical Introduction to the Cosmological Constant Problem

超弦/M理论、粒子物理及宇宙学专题研讨会，10.21-11.3

宇宙学常数问题是对基础物理研究影响最大的问题之一，回顾一下这个问题的历史和研究现状，
$$\begin{cases} \Lambda \simeq 0^+ \ ? \\ \rho_\Lambda^0 \simeq \rho_{NR}^0 \ ? \end{cases}$$

参考文献：hep-th/0212290

astro-ph/0207347

astro-ph/0004075

gr-qc/0208027

⋮

宇宙学常数的引入

Einstein (1915.11.25) "final results" of the field equations: $\left[g_{\mu\nu} \sim (-++\cdots+) \right]$

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} R = 8\pi G T_{\mu\nu}$$

无宇宙学常数项 $\Lambda g_{\mu\nu}$ → 尽管该项是广义协变性和等效原理允许的.

· $\Lambda g_{\mu\nu}$ 的张量性质 → 广义协变性

· 等效原理: (弱) $m_{惯性} = m_{引力的}$

$E \sim mc^2$ $\qquad E_{力学} = E_{引力的}$

↓

运动方程"首次积分"(守恒量)

用 Nöther 流的方法构造的

$T_{\mu\nu}$ 是"力学"能量-动量张量

$$T_{\mu\nu} = \frac{2}{\sqrt{-g}} \frac{\delta S_m}{\delta g^{\mu\nu}}$$ → 引力源

如果除了普通物质的能量-动量张量，还存在其它的能量（"暗能量"），也应作为引力场的源，这正是等效原理要求的：

$$T^{tot}_{\mu\nu} = T_{\mu\nu} - \frac{\Lambda}{8\pi G} g_{\mu\nu}$$

所以引入宇宙学项并不与等效原理冲突.

广义相对论的"first principles"（或 selection principles）不排除引入宇宙学常数项.

为什么当时 Einstein 没有引入？

可能的原因：

① 没有真正坚持(贯彻)一切从第一原理推导出来

② 当时的情况可能比较仓促

中国科技大学
上海研究院
USTC-SIAS
USTC SHANGHAI INSTITUTE FOR ADVANCED STUDIES
中国上海浦东秀浦路99号
Add:No.99,South xiupu,shanghai
TEL: +86 21 68120000 FAX: +86 21 68121320
P.C.:201315 http://www.ustc-sias.sh.cn

- 1915年夏天, Einstein 在 Gottingen 给了一系列讲演, 试图说服 Hilbert、Klein, 他已经接近得到正确的引力场方程; 在此之前他的方程一直没写对

- 1915.11.20, Hilbert 向杂志投稿, 这篇发表于 1916年3月, 用变分原理 ("Hilbert-Einstein 作用量") 推导出了引力场方程. 投稿日期比 Einstein 早了五天.

- Einstein 非常不高兴, 当天给人写信说:

The theory is incomparable beautiful, but only one colleague understands it, and that one works skillfully at "nostrification". I have learned deplorableness of humans more in connection with this theory than in any other personal experience ⋯ [注: 较近, 历史学家发现 1915.12.6 校样稿]

场方程满足当时的"唯象"要求. 牛顿近似:

$$g_{00} \sim -1 - 2\Phi \qquad (\Phi\text{: 万有引力势})$$

$$T_{00} = \rho \qquad (\text{能量密度})$$

$$\nabla^2 g_{00} = -8\pi G\rho \quad \Rightarrow \quad \nabla^2 \Phi = 4\pi G\rho$$

· 宇宙模型(1917): 静态宇宙(当时观测到的恒星都是低速运动的). 除非 $\rho=0$, 不允许有静态解.

平均密度 $\rho = \text{const}$.

$\vec{a} = -\nabla\Phi$; 静态: $\vec{a}(x)$ 处处为 0. $\rightarrow \rho = 0$.

引力总能吸引, 没有"斥力"与之平衡, $\vec{a} \neq 0$.

$\rightarrow$ 斥力项 $(\Lambda > 0)$:

$$\nabla^2\Phi + \Lambda = 4\pi G\rho$$

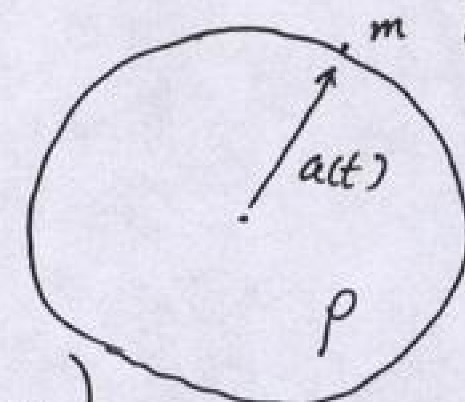
↳ "Newton-Hooke 时空" 非相对论

中国科技大学 上海研究院
USTC-SIAS
USTC SHANGHAI INSTITUTE FOR ADVANCED STUDIES
中国上海浦东秀浦路99号
Add:No.99,South xiupu,shanghai
TEL: +86 21 68120000 FAX: +86 21 68121320
P.C.:201315 http://www.ustc-sias.sh.cn

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} R + \Lambda g_{\mu\nu} = 8\pi G T_{\mu\nu}$$

- Friedmann (1922, 1924) 演出的；RW 度量.

Newton 理论:



能量守恒 对 m:

$$\frac{1}{2} m \dot{a}^2(t) - \frac{Gm}{a(t)} \cdot \left(\frac{4\pi}{3} \rho a^3(t)\right) = -\frac{m}{2} k$$

$$\begin{cases} k > 0: & m \text{ 最终不能逃脱} \rightarrow \text{将导塌缩} \\ k \leq 0: & \text{永膨胀} \end{cases}$$

对 ρ:

$$d\left(\frac{4\pi}{3} \rho a^3(t)\right) = -p \cdot d\left(\frac{4\pi}{3} a^3\right)$$

$$\begin{cases} \left(\frac{\dot{a}}{a}\right)^2 + \frac{k}{a^2} = \frac{8\pi}{3} G \rho \\ \frac{d}{da}(\rho a^3) + 3 p a^2 = 0 \end{cases}$$

第一方程两边同乘 a^2，对 t 求导:

$$2\dot{a}\ddot{a} = \frac{8\pi}{3}G\frac{d}{dt}(\rho a^2) = \frac{8\pi}{3}G\,\dot{a}\,\frac{d}{da}(\rho a^2)$$

$$= \frac{8\pi G}{3}\dot{a}\left(2\rho a + a^2\frac{d\rho}{da}\right)$$

$$\rightarrow \quad \frac{\ddot{a}}{a} = \frac{4\pi G}{3}\left(2\rho + a\frac{d\rho}{da}\right)$$

第二个方程给出:

$$a^3\frac{d\rho}{da} + 3\rho a^2 + 3pa^2 = 0$$

$$\Rightarrow \quad a\frac{d\rho}{da} = -3\rho - 3p$$

$$\left\{ \begin{aligned} H^2 &\equiv \left(\frac{\dot{a}}{a}\right)^2 = \frac{8\pi G}{3}\rho - \frac{k}{a^2} \\ \frac{\ddot{a}}{a} &= -\frac{4\pi G}{3}(\rho + 3p) \end{aligned} \right.$$

Friedmann 方程组

RW 度量 $\left\{ \begin{aligned} & ds^2 = -dt^2 + a^2(t)\left[\frac{dr^2}{1-kr^2} + r^2 d\Omega^2\right] \\ & k = 0, \pm 1 \qquad T_{\mu\nu} = (\rho+p)u_\mu u_\nu + p g_{\mu\nu} \end{aligned} \right.$

$$T_{\mu\nu} \sim \begin{pmatrix} \rho & & & 0 \\ & p & & \\ & & p & \\ 0 & & & p \end{pmatrix}$$

"普通物质" $\rho>0$, $p>0$, 无静态解 $\dot{a}=0$

$k=0,-1$ 第一方程不存在 $\dot{a}=0$ 的解；即使 $k=+1$,

第二方程也无 $\ddot{a}=0$ 的解. 宇宙演化是 Einstein

场方程（+宇宙学原理）的必然推论.

引入宇宙学常数 $\Lambda>0$ 后

$$T^{tot}_{\mu\nu} = T_{\mu\nu} - \frac{\Lambda}{8\pi G} g_{\mu\nu}$$

$$\begin{cases} \rho^{tot} = \rho - \frac{\Lambda}{8\pi G} g_{00} = \rho + \frac{\Lambda}{8\pi G} \\ p^{tot} = p - \frac{\Lambda}{8\pi G} \end{cases}$$

用 ρ^{tot}, p^{tot} 代替 Friedmann 两方程中

的 ρ 和 p, 得：

$$
\begin{cases}
H^2 = \dfrac{8\pi G}{3}\rho + \dfrac{\Lambda}{3} - \dfrac{k}{a^2} \\[2ex]
\dfrac{\ddot{a}}{a} = -\dfrac{4\pi G}{3}(\rho + 3p) + \dfrac{\Lambda}{3}
\end{cases}
$$

若 ρ、p 的物态方程描述非相对论性的 "dust"，则 $\rho > 0$，$p = 0$；加速度方程在 $\ddot{a} = 0$ 的解存在要求 $\Lambda = 4\pi G\rho$；代入 $H^2 = 0$

$\Rightarrow \quad a^2 = k/\Lambda$ （k 只能为 $+1$）。但密度稍有扰动，$\Lambda = 4\pi G\rho$ 不再能成立时，这个静态解不是稳定的。

引进宇宙学项时 Einstein 又一次采取了"唯象"的立场，事后也并不满意

1923年给 Weyl 的信："... If there is no quasistatic world, then away with the cosmological term"

《The meaning of relativity》(1945, 第二版):

"Introduction of the 'cosmological member' into the equations of gravity, though possible from the point of view of relativity, is to be rejected from the point of view of logical economy"

"... If Hubble's expansion had been discovered at the time of the creation of the general theory of relativity, the cosmologic member would never have been introduced. It seems now so much less justified to introduce such a member into the field equations, since its introduction loses its sole original justification, — that of leading to a natural solution of the cosmological problem."

Gamow (1970): "... he remarked that the introduction of the cosmological term was the biggest

真空能量 从粒子物理或场论角度看，宇宙学常数可理解为真空零点能.

标量场: $V(\phi)$

$$S = \int d^4x \sqrt{-g} \left[\frac{1}{2} g^{\mu\nu} \partial_\mu \phi \partial_\nu \phi - V(\phi) \right]$$

$$T_{\mu\nu} = \frac{1}{2} g_{\mu\nu} \cdot \left(g^{\alpha\beta} \partial_\alpha \phi \partial_\beta \phi \right) + \frac{1}{2} \partial_\mu \phi \partial_\nu \phi - V(\phi) g_{\mu\nu}$$

最低能量 $\partial_\mu \phi = 0 \Rightarrow T^{vac}_{\mu\nu} = -V(\phi_0) g_{\mu\nu}$

真空量子涨落对零点能的贡献:

$$\rho_{vac} \sim \frac{1}{V} \sum_k \frac{1}{2} \hbar \omega_k$$

$$= \frac{1}{2} \int_0^M \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \sqrt{k^2+m^2}$$

$$\sim \frac{M^4}{8\pi^2} \qquad (M:\ \text{cut-off})$$

Pauli，30年代将 cut-off 取成电子半径

$$M \sim \frac{2\pi m_e}{\alpha}$$

$$a \sim \frac{1}{\sqrt{\Lambda}} \sim \frac{1}{\sqrt{4\pi G \underbrace{M^4/8\pi^2}_{\rho_{vac}}}} \sim 31\ km$$

"could not even reach to the moon".

Zel'dovich 1967, 1968 发表了类似的想法，

企图将 Λ 的值由真空零点能给出.

$$\rho_\Lambda^{EW} \sim (200\ GeV)^4$$

$$\rho_\Lambda^{QCD} \sim (0.3\ GeV)^4, \quad \rho_\Lambda^{GUT} \sim (10^{15}\ GeV)^4$$

$$\rho_\Lambda^{Pl} \sim (10^{18}\ GeV)^4$$

都远远大于观测到的值

$$\rho_\Lambda^{observed} \sim (10^{-12}\ GeV)^4$$

注 (i) Bosonic Fields $\sim \frac{1}{2}\sum_k \omega_k$

Fermionic $\sim -\frac{1}{2}\sum_k \omega'_k$

正、负贡献抵消，给出与观测吻合的小 Λ？

极端情况：超对称 $\Rightarrow \Lambda = 0$

但加速器实验表明超对称是破缺的，$M_{SUSY} \gtrsim 10^3$ GeV

$$\rho_\Lambda^{SUSY} \sim M_{SUSY}^4 \qquad (m_b = m_f, \ldots)$$

仍然很大

(ii) 前面的估算本质是微扰论的

(自由场论近似，$\omega_k \sim \sqrt{k^2+m^2}$，…)

能否找到非微扰的机制对零点能有很大的修正？

Banks 的经验公式

$$\rho_\Lambda \sim \frac{M_{SUSY}^a}{M_{pl}^{a-4}}$$

(1) 若 Λ-项纯粹起源于量子引力的 short-distance 行为，a 应取 0 $\Rightarrow \rho_\Lambda \sim M_{pl}^4$

(2) 若 Λ 纯粹来自 SUSY 自发破缺

a 应取 4 $\Rightarrow \rho_\Lambda \sim M_{SUSY}^4$

(3) 接近天文观测结果的 a 值是 8:

$$\rho_\Lambda \sim \frac{M_{SUSY}^8}{M_{pl}^4} \sim \left(\frac{M_{SUSY}}{M_{pl}}\right)^8 \cdot M_{pl}^4$$

$$M_{SUSY} \sim 10^3\ \text{GeV}, \quad M_{pl} \sim 10^{18}\ \text{GeV}$$

$$(10^{-15})^8 \sim 10^{-120}$$

Naively, $a=4$ "跑动"到 $a=8$ 比 $a=0$ "跑动"到 $a=8$ 似更容易，启发非微扰地考虑 SUSY 破缺机制来解决宇宙学常数问题

迄今尚无成功的机制.

粒子物理中能否出现 10^{-12} Gev 这样小的 scale?

小的中微子质量可能是一个线索 (hep-th/0410196)

$M \sim \sqrt{m_1 m_2}$, $m_1 + m_2$

$m_1 \sim 7\times 10^{-3}$ eV

$m_2 \approx 5\times 10^{-2}$ eV

$\sin^2\theta \sim 0.3$

$\rho_\Lambda \sim 0.43\times 10^{-47}$ Gev^4

问题: 为何 M 不取 EW 能标?

$$|\text{质量}\rangle \sim \sum_{\text{mixing}} |\text{flavor}\rangle$$

$$|0(t)\rangle_f = G_\theta^{-1}(t)\,|0\rangle_m$$

θ: mixing angle, t: time

$$G_\theta(t) = \exp\left[\theta\int d^3\vec{x}\,\left(\nu_1^+(x)\nu_2(x) - \nu_2^+(x)\nu_1(x)\right)\right]$$

设 $\alpha_{\vec{k},i}$, $\beta_{\vec{k},i}$ 是 ν_1, ν_2 具有确定质量 m_1, m_2 的湮没算子, Bogoliubov 变换系数 $V_{\vec{k}}$:

$$_f\langle 0|\alpha^+_{\vec{k},j}\,\alpha_{\vec{k},j}|0\rangle_f = {}_f\langle 0|\beta^+_{\vec{k},j}\,\beta_{\vec{k},j}|0\rangle_f$$

$$= |V_{\vec{k}}|^2 \sin^2\theta$$

$$T_{00} = \sum\int d^3\vec{k}\,\omega_{k,j}\left(\alpha^+_{\vec{k},j}\alpha_{\vec{k},j} + \beta^+\beta\right)$$

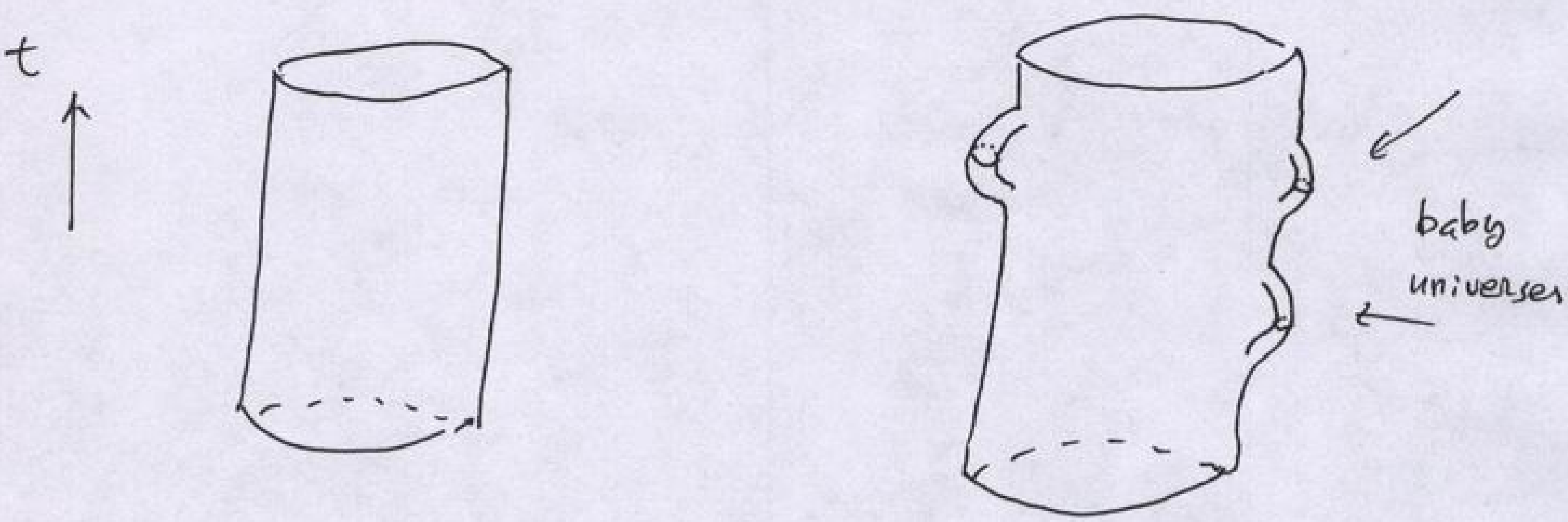
$$_f\langle 0|T_{00}|0\rangle_f = 32\pi^2\sin^2\theta\int_0^M dk\,k^2\left(\omega_{k,1}+\omega_{k,2}\right)|V_{\vec{k}}|^2$$

量子引力（有效理论）的尝试

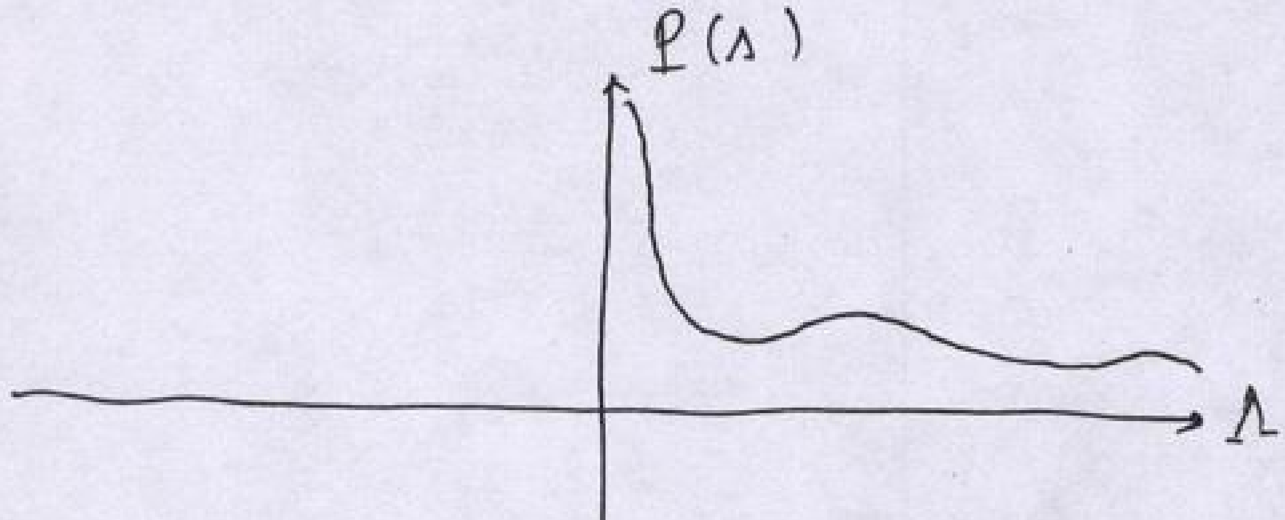
Baum & Hawking, Coleman, …

"Baby universe" 或 "wormhole"

基本思路



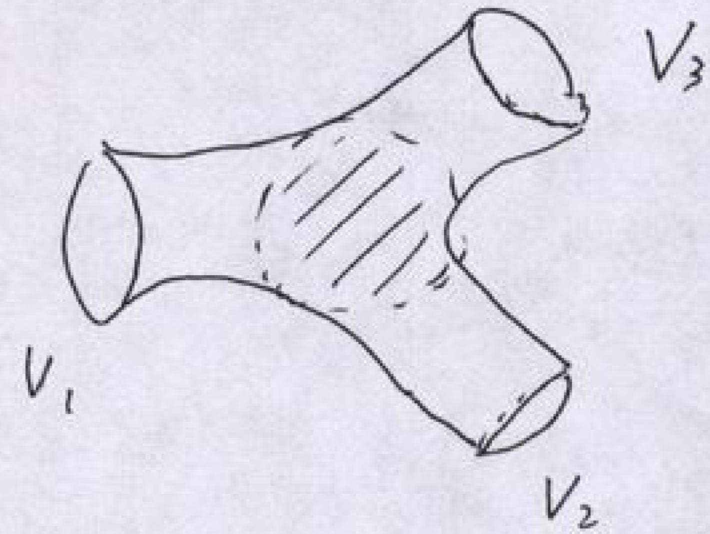
Λ 在不同的宇宙上，值的分布 $P(\Lambda)$ 不同



最可能的值在 $\Lambda=0$ 或 $\Lambda\approx 0$；希望 $P(\Lambda)$ 可算

Baby universes 存在的特点是：有效理论中有非定域的相互作用

$$\propto \int_{V_1} d^4x \sqrt{-g} \int_{V_2} d^4x \sqrt{-g} \int_{V_3} d^4x \sqrt{-g}$$



有效作用量除了标准的形式

$$S_M = -\frac{1}{16\pi G_M}\int d^4x \sqrt{-g}\,(R - 2\Lambda_M) + \cdots$$

($M \ll M_{pl}$ 是 cut-off 能标)

还要加上 $V = \int d^4x \sqrt{-g}$ 的非线性函数 $F_M(V)$

$$S^M_{eff}[g_{\mu\nu}, \Phi] \sim -\frac{1}{16\pi G_M}\int d^4x \sqrt{g}\, R$$

$$+ F_M\left(\int d^4x \sqrt{g}\right)$$

具体计算不得不用 Euclidean 形式

是否能从基本理论(如弦)中导出？如果能，则在 cut-off $M \to M'$ 时，上述 Ansatz 形式能够保持。若取低的 cut-off M'，$F_{M'}$ 变成 ν 的线性函数，就是普通的宇宙学项，那么 baby universes 就不存在。

自恰性检验　当 cut-off $M \to M'$ 时，

$$e^{-S_{eff}^{M'}[g_{\mu\nu},\Phi]} = \int_{(M')^{-1} \geq L \geq (M)^{-1}} [dg_{\mu\nu}][d\Phi]\, e^{-S_{eff}^{M}[g_{\mu\nu},\Phi]}$$

Mellin 变换：

$$e^{-F_M(\nu)} = \int_0^\infty \frac{d\sigma}{\sigma} f_M(\sigma)\, \sigma^{-\nu}$$

$$= \int_0^\infty \frac{d\sigma}{\sigma} f_M(\sigma)\, e^{-\int d^4x \sqrt{g} \cdot \log \sigma}$$

$$\int_0^\infty \frac{d\sigma}{\sigma} f_M(\sigma) \int_{(M')^{-1} \geq L \geq M^{-1}} [d g_{\mu\nu}][d\Phi]$$

$$\exp\left\{ \frac{1}{16\pi G} \int d^4x \sqrt{g} \,\left(R - 2\Lambda_M(\sigma) \right) + \cdots \right\}$$

这里:

$$\Lambda_M(\sigma) \equiv 8\pi G_M \log\sigma$$

是个跑动的有效宇宙学常数.

对固定的 σ, 积分给出引力有效理论

$$\Gamma_{eff} \sim \exp\left\{ \frac{1}{16\pi G} \int d^4x \sqrt{g} \left[R - 2\Lambda_{M'}(\sigma) \right] + \cdots \right\}$$

这里 $\Lambda_{M'}(\sigma)$ 的函数形式可能与 $\Lambda_M(\sigma)$ 不同.

$$\Lambda_{M'}(\sigma) \equiv 8\pi G \log\sigma'$$

若令

$$\frac{d\sigma}{\sigma} f_M(\sigma) \equiv \frac{d\sigma'}{\sigma'} f_{M'}(\sigma')$$

$$e^{-F_{M'}(V)} \equiv \int_0^\infty \frac{d\sigma'}{\sigma'} f_{M'}(\sigma') (\sigma')^{-V}$$

$\Rightarrow$

$$S_{eff}^{M'}[g_{\mu\nu}, \Phi] = -\frac{1}{16\pi G}\int d^4x\sqrt{g}\, R + F_{M'}\left(\int d^4x\sqrt{g}\right)$$

Claim：在相当一般的条件下，$F_{M'}(V)$ 也不是线性的。

反证：$F_{M'}(V)$ 线性条件：

$$f_{M'}(\sigma') \propto \delta(\sigma'-\sigma'_0)$$

$\Rightarrow$ $f_M(\sigma) \propto \delta(\sigma-\sigma_0)$

$\Rightarrow$ $F_M(V)$ 也是线性的。#

$F_M(V)$ 非线性 $\Leftrightarrow$ $F_{M'}(V)$ 非线性，baby universes 的存在与 cut-off 的选取无关。

有效宇宙学常数 $\Lambda_M(\sigma)$ 的"系综"分布 $P(\sigma)$.

$$Z = \int_0^\infty \frac{d\sigma}{\sigma} f_M(\sigma) \int [dg_{\mu\nu}][d\Phi]$$

$$\exp\left\{ \frac{1}{16\pi G} \int d^4x \sqrt{g} \left[R - 2\Lambda_M(\sigma) \right] + \cdots \right\}$$

$$\xrightarrow{\text{鞍点近似}} \int_0^\infty \frac{d\sigma}{\sigma} f_M(\sigma)\, e^{-\Gamma_\sigma[\bar{g}_{\mu\nu}, \bar{\Phi}]}$$

$$\begin{cases} \left.\dfrac{\delta \Gamma_\sigma[g_{\mu\nu}, \Phi]}{\delta g_{\mu\nu}}\right|_{g_{\mu\nu} = \bar{g}_{\mu\nu}} = 0 \\[2em] \left.\dfrac{\delta \Gamma_\sigma[g_{\mu\nu}, \Phi]}{\delta \Phi}\right|_{\Phi = \bar{\Phi}} = 0 \end{cases}$$

$$\Gamma_\sigma[g_{\mu\nu}, \Phi] = -\frac{1}{16\pi G} \int d^4x \sqrt{g} \left[R - 2\Lambda(\sigma) \right] + \cdots$$

鞍点 $\bar{g}_{\mu\nu}$ 是 Einstein 方程的解：

$$\frac{\delta}{\delta g_{\mu\nu}} \Gamma_\sigma[g_{\mu\nu}]\Big|_{g_{\mu\nu}=\bar{g}_{\mu\nu}} = 0$$

· $\Lambda_M(\sigma) < 0$ 时 $\Gamma_\sigma[\bar{g}_{\mu\nu}] > 0$

· $\Lambda_M(\sigma) > 0$ 时，$\rightarrow$ S^4 解，$\Gamma_\sigma[\bar{g}_{\mu\nu}] = -\frac{3\pi}{\Lambda G}$

$$Z = \int \frac{d\sigma}{\sigma} f_M(\sigma)\, e^{\frac{3\pi}{\Lambda(\sigma) G}}$$

$$\equiv \int d\mu(\Lambda)\, e^{\frac{3\pi}{\Lambda G}}$$

最可能的 Λ 是 $\Lambda \simeq 0^+$.

困难 (i) Minkowskian QG $\rightarrow e^{\frac{i3\pi}{\Lambda G}}$

振荡 (ii) Euclidean QG 作用量

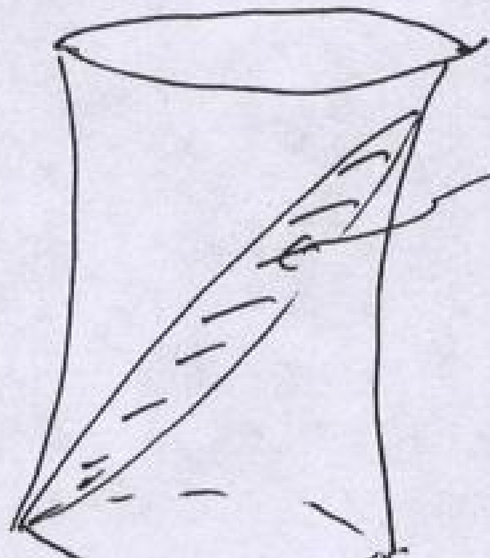
无下界，在定义路径积分时有困难

holography对理论的要求 (hep-th/0001145, Hořava, Minic

低能大尺度

$$S_{eff} \sim -\int d^4x \sqrt{g} \left(\frac{1}{8\pi G}\Lambda + \frac{1}{16\pi G} R + a R_{\mu\nu}R^{\mu\nu} + bR^2 + c R_{\mu\nu\rho\sigma}R^{\mu\nu\rho\sigma} + \cdots \right)$$

全息原理: bulk引力的全部信息都在降一维的 "holographic screen" 上, # dof ≤ Bekenstein-Hawking bound.



— holographic screen, size 为 r

$\Lambda r^2 \approx 1$.

de Sitter: horizon (finite)

熵: $S \approx r^2 M_{pl}^2$ # dof

故在 holographic screen 上, $\Delta S \approx M_p^2$

$$S \le \frac{M_{pl}^2}{\Lambda}$$

在大距离，Λ 可用经典变量来处理

Boltzmann 统计原理：$\Lambda \to \Lambda + d\Lambda$ 分布

$$w(\Lambda)d\Lambda = \text{const.}\, e^{S(\Lambda)} \simeq \text{const.}\exp\left\{\frac{cM_{pl}^2}{\Lambda}\right\}$$

中国科技大学
上海研究院
USTC-SIAS
USTC SHANGHAI INSTITUTE FOR ADVANCED STUDIES
中国上海浦东秀浦路99号
Add:No.99,South xiupu,shanghai
TEL: +86 21 68120000 FAX: +86 21 68121320
P.C.:201315 http://www.ustc-sias.sh.cn