M. R. Douglas, (hep-th/0303194, 0401004)

弦理论的真空统计

宇宙学常数 Λ：物理参数

在"不同宇宙"中的几率分布：

$$d\mu(\Lambda) \propto e^{\frac{3\pi}{\Lambda G}}$$

推广到其它物理参数：

$$(\Lambda, G, e, m_e, \ldots)$$

$$d\mu[\Lambda, G, \ldots] \propto \; ?$$

弦理论考虑

不同的紧化 ~ 弦的不同真空

~ 不同的物理世界（带各自的物理参数 $\Lambda, G, \ldots$）

弦论真空：如果不是无限，也是巨大的

人们根据目前的经验相信：

其中只有少数几个（如100个）在各种细节上与观测到的宇宙吻合（正确的Λ，SM，…）

困境

(1) 如果这种说法是对的，说明弦理论缺乏 prediction：预言了一大堆真空解，其中的 99.999999…%。对真实物理世界都是 irrelevant 的

(2) 如果不对，那么做弦理论很可能什么有用的结果都得不到

真空选择原理

是否存在某些先验的原理来挑选正确的真空？

一度人们相信，弦的非微扰效应最终将打破这些真空在能量上的简并，这样可以加一个"极小能量"原理。

[illegible] "美与对称原理"…

建立这类"原理"需要对每个真空(解)都有细致的了解，并有真空构成的 configuration space 的详细知识 → 在可见的将来获得这样的知识，看起来不大现实，而且，没有任何保证这样的"原理"确实存在.

这样的"原理"，企图解释为什么观测到的是这个宇宙(而不是其它的)，有些越出了物理学的范围，物理学原本是要解释我们观测到的是什么，而非为何我们会观测到它.

我们能做什么

按照 Dine 的建议，应寻求 string 理论的 "generic predictions"

如果了解了弦理论"所有"的真空(或至少其中的一个有代表性的子集)，我们可以对某个具体感兴趣的性质(如 Λ 的值)，以研究其统计分布

P ~ 针对具有特种性质的真空

针对"所有"真空

这种统计，目前主要只能在真空好的子集中进行

希望所选的子集是具有代表性的。

例如：在所有通过紧化得到的 4-d 真空中，有多少能给出低能下规范群为 $SU(3)\times SU(2)\times U(1)$ 的有效场论？

更一般：低能规范群为 G 的有效场论有多少种？

分布测度记为 $d\mu[G]$。如 rank $G = r$，可以建立类似于这样的统计结果：

$$d\mu[r] \sim N\cdot r^{-\alpha}$$

其中 N, α 是可以进行估算的数值。对乘积规范群，如 quiver 规范理论中的 $G = \prod_{i=1}^{K} U(N_i)$ + bifundamental 物质 $(\bar{N}_i, N_j)$, $(\bar{N}_j, N_i)$ $\longrightarrow \frac{K(K-1)}{2}$、

$N\times N$ 反对称矩阵 I_{ij}

如果"所有真空"来自II弦在CY上的紧化，则可估算

$$d\mu[N_i; I_{ij}] \sim \frac{dI_{ij}}{|I_{ij}|}$$

这个结果对$|I_{ij}|$很大时成立；但有个 cut-off

$$I_{max} \sim \min(N_1, N_2) \sim 100$$

例 "SM"，$U(3)\times U(2)\times U(1)\times U(1)$

$$(I_{ij}) \sim \begin{pmatrix} 0 & -3 & 3 & 3 \\ 3 & 0 & -1 & 2 \\ -3 & 1 & 0 & 0 \\ -3 & -2 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$K=4$，分布为

$$d\mu(-3)\,d\mu(3)\,d\mu(3)\,d\mu(-1)\,d\mu(2)\,d\mu(0) \sim 10^{-6}$$

$|I_{ij}| \sim O(10)$，$|\delta I_{ij}| \sim O(1)$

如果紧化给的真空解包含更多的膜因子，还可以加入带SM子群荷的其它exotic物质的.

$$I \sim \begin{pmatrix} I_{SM} & I_{exotic} \\ -I^{t}_{exotic} & \ddots \end{pmatrix}$$ → 相应的分布值小得多

Flux 真空

在紧化的维度中打开规范场强

→ 更多的真空解.

甚至能产生小的真空能量 → 宇宙学常数问题

Bousso & Polchinski

在 Calabi-Yau 流形上紧化, 带 K 个 cycles

vacua w/ small c.c. $\sim c^K$

典型的 CY 流形 $K \sim 100\text{-}500$ cycles

$N_{vac} \sim 10^{100} - 10^{500}$

从统计的角度看, 宇宙学常数很小也是弦理论 "generic" 的一个结果.

F: 规范场强; 运动方程 $dF = 0$

设 Σ_α 是 CY 中的一个闭合 cycle, 则 F 在 Σ_α flux 的量子数为:

$$N^\alpha = \int_{\Sigma_\alpha} F$$

总能量

$$E \sim E_0 + \frac{1}{\rho^4} \sum_{i=1}^{K} q_i(z)^2 N_i^2$$

这里 l: 紧化空间尺度

E_0 : 与 flux 无关的部分对能量的贡献

g_i : 由运动学理论确定的常数，是模空间参数

设 $E_0 < 0$, $g \sim 1$. 则给定 $\Lambda = E(N)$ 的真空数可如下估算:

$$d\mu_{vac}(\Lambda) \sim \int d^K N \; \delta(\Lambda - E)$$

$$\sim \left(\Lambda - (E_0 l^4)\right)^{K/2 - 1}$$

因此, $\Lambda < \frac{\epsilon}{l^4}$ 的真空数:

$$d\mu_{vac}(\Lambda \sim 0) \sim \epsilon L^{K/2 - 1}$$

其中 $L = E_0 l^4$

Flux 真空的计数

考虑 IIb 弦紧化 (Giddings, Kachru & Polchinski)

$\longrightarrow$ $d=4$ $\mathcal{N}=1$ 有效超引力理论

轴伸场: $\tau = C^{(0)} + i e^{-D}$

(axion-dilaton)

$(z^i, \rho^i) \rightarrow$ M 的复结构和 Kähler 结构模参数

相应的 Kähler 势

$$K(z, \bar{z}) = -\log \mathrm{Im}\, \bar{z}^i \frac{\partial \mathcal{F}(z)}{\partial z^i} - \log \mathrm{Im}\, \tau - 3 \log \mathrm{Im}\, \rho$$

与对应的 $N=2$ 理论是一致的. Flux 量子数:

$$N^\alpha \equiv N^\alpha_{RR} + \tau N^\alpha_{NS}$$

$$= \int_{\Sigma_-} \bar{F}^{(3)}_{RR} + \tau H^{(3)}_{NS}$$

超势

$$W(z) = \int_M \left(F^{(3)}_{RR} + \tau H^{(3)}_{NS}\right) \wedge \Omega(z)$$

$$\equiv \int_M G \wedge \Omega(z)$$

$\rightarrow$ stabilizes moduli space of complex structures

independent of Kähler moduli

$\downarrow$

完全忽略 Kähler 模参数

tadpole cancellation $\longrightarrow$ 上述 flux 的总数

$$L \sim \int F\wedge H = N(\text{O3 planes}) - N(\text{D3 branes})$$

若要求计数超对称真空，则考虑满足上述条件的运动方程 $D_i W(z,\tau) = 0$ 的解的个数

当 L 很大时

$$I_{vac}(L \le L_{max}) = \frac{(2\pi L)^{b_3}}{\pi^{n+1}\, b_3!} \int_{\mathcal{F}\times\mathcal{H}} \det(-R-\omega\cdot 1)$$

$\mathcal{F}$: moduli space of complex structures $\rightarrow$ 基本域

$$\mathcal{M} \sim \mathcal{D}/\Gamma \ ; \quad \mathcal{D} \sim \bigcup_{i\in\Gamma} i(\mathcal{F})$$

$\mathcal{H}$: $SL(2,\mathbb{Z})$ 的基本域

ω: Kähler 2-形式，R: 曲率 2-形式

$M = T^6/\mathbb{Z}_2$: $(K = b_3 = 20;\ L = 32)$

$$I_{vac} \sim \frac{7\cdot(2\pi L)^{20}}{4\cdot 181440\cdot 12\cdot 20!} \sim 4\cdot 10^{21}$$

stabilization of Kähler moduli

α'-非微扰修正通常破坏 "no scale" 结构，Kähler 模参数将进入超势，例如

$$W_{NP} \sim e^{iN\rho} + \dots$$

$DW(z)=0$ 一般有 $e^K|W|^2 \ll M_{pl}^4$ 的解，得到一个稳定的 SUSY AdS 真空

$$0 = D_\rho W = iNe^{iN\rho} - \frac{3}{\rho-\bar{\rho}} W_{rest}$$

$$\to \quad \frac{2N}{3}(\mathrm{Im}\,\rho)e^{iN\rho} = W_{rest}$$ (满足该条件的

左边值 $2/3e \sim 1$；只要 W_{rest} 不太大，真空稳定

解的个数估算为：

$$N_{vac}(\Lambda = \epsilon \ll L) \sim N_{vac} \cdot \frac{\epsilon b_3}{L}$$

"一致收敛于 0"。

AdS Λ : L^2 (L 是 矢量flux空间)

↳ periods of cycles

$\epsilon \sim 10^{-3}$